Université Claude Bernard, Lyon 1
Année universitaire 2014 – 2015.

Licence de mathématique 3ème année
Mesure et intégration.

Devoir maison : Intégrale de Riemann et Lebesgue, 2.

Cadre Théorique

Dans ce devoir maison nous continuons l'étude du rapport entre l'intégral de Riemann et l'intégral de Lebesgue.

Le cadre théorique reste donc la mesure de Lebesgue. On rappelle que la mesure de Lebesgue λ est l'unique mesure sur l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tel que $\lambda((a,b]) = b - a$.

Dans le dernier devoir maison on a démontré que l'intégrale de Lebesgue est une généralisation de l'intégrale de Riemann, i.e. si une fonction est intégrable selon Riemann, alors elle est intégrable selon Lebesgue. Plus précisément

Théorème 1. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne, bornée. Si f est Riemann intégrable sur $[a,b]$, alors f est aussi Lebesgue intégrable et les deux intégrales coïncident. De plus, dénotant $(\mathcal{R}) \int_a^b f$ l'intégrale de Riemann de f et $\int_a^b f$ l'intégrale de Lebesgue, alors on a*

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f = \int_a^b f.$$

Maintenant on veut investir le rapport entre l'intégrale de Riemann généralisé et l'intégrale de Lebesgue.

On rappelle que $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ est intégrable selon Riemann en sens généralisé sur $[a,\infty)$ si pour tous $M > 0$, f est Riemann intégrable sur $[a,M]$ et le limite $\lim_{M\to\infty} \int_a^M f$ existe fini. Alors on définie

$$(\mathcal{R}) \int_a^\infty f = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f.$$

Remarque qu'il n'y a aucune hypothèse sur le signe de f !

Exercices

Le but de ce devoir maison est de prouver

Théorème 2. *Soit $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}_+$ Riemann-intégrable en sens généralisé sur $[a,\infty)$. Alors si f a signe constant sur $[a,\infty)$ on a*

$$(\mathcal{R}) \int_a^\infty f = \int_a^\infty f.$$

(1) Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $f_k : [a,\infty) \to \mathbb{R}_+$ une suite de fonctions positives p.p. croissantes. Démontrer que s'il existe $c > 0$ tel que, uniformément sur $k \in \mathbb{N}$, $\int_a^\infty f_k \le c$, alors f_k converge p.p. vers une fonction f Lebesgue-intégrable sur $[a,\infty)$, i.e. $\int_a^\infty f < \infty$. (Aide : utiliser le theorem de la convergence monotone).

(2) Soit $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}_+$ une fonction positive. Démontrer que la suite

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), \ x \in [a, n], \\ 0, \ x > n \end{cases}$$

est croissante et converge simplement vers $f(x)$. Si f est Riemann-intégrable en sens généralisé sur $[a, \infty)$ en déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^n f = (\mathcal{R}) \int_0^\infty f.$$

Avec le théorème de la convergence monotone en déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f_n = \int_a^\infty f.$$

Utilisant le point (1) montrer que $\int_a^\infty f < \infty$ et qu'il faut $\int_a^\infty f = (\mathcal{R}) \int_0^\infty f$, i.e. la prouve du théorème 2.

(3) Montrer que $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ est Riemann-intégrable en sens généralisé sur $[\pi, \infty)$, mais $f \notin L^1([\pi, \infty)) := \{f : [\pi, \infty) \to \mathbb{R} : \int_\pi^\infty |f| < \infty\}$.

Aide pour montrer que $f \notin L^1([\pi, \infty)$:

(a) écrire $[\pi, \infty] = \cup_{n=1}^\infty [n\pi, (n+1)\pi)$,

(b) utiliser les propriétés de l'intégrale de Lebesgue pour écrire l'intégrale sous-forme de série,

(c) en étudier la convergence.

En déduire que le theorem 2 est faux si f n'est pas de signe constant sur $[a, \infty)$, i.e. qu'il existe $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ Riemann-intégrable en sens généralisé sur $[a, \infty)$, mais $f \notin L^1([a, \infty))$.