**Université Claude Bernard, Lyon** 1
Année universitaire 2014 − 2015.

Licence de mathématique 3ème année
Mesure et intégration.

Devoir maison : Intégrale de Riemann et Lebesgue.

---

## Cadre Théorique

L'idée de ce devoir maison est d'investir le rapport entre l'intégral de Riemann et l'intégral de Lebesgue.

Le devoir maison est organisé en deux parties. La première partie (points 1 − 4) concerne la définition de l'intégrale de Riemann puis la définition de l'intégrale d'une fonction étagée et d'une fonction positive par rapport à une mesure donnée. La deuxième partie (points 5 − 9) concerne la théorie plus avancée de l'intégration par rapport à une mesure et le théorème de la convergence monotone.

En particulier on s'intéressera à la mesure de Lebesgue : on définit la mesure de Lebesgue $\lambda$ comme l'unique mesure $\lambda$ sur l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tel que $\lambda((a, b]) = b - a$. On verra dans la suite du cours que cette mesure est bien définie (ou alors directement par le Théorème de Charatéodory, pour qui est intéressé).

## Exercices

Let but de cet exercice est de prouver que l'intégrale de Lebesgue est une généralisation de l'intégrale de Riemann, i.e. si une fonction est intégrable selon Riemann, alors elle est intégrable selon Lebesgue. Pour simplifier le cadre et suivre le programme du cours nous nous restreindrons au cas des fonctions positives, mais il faut remarquer que ce résultat reste vrai également sans l'hypothèse de positivité de la fonction.

**Théorème 1.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne, bornée et positive. Si $f$ est Riemann intégrable sur $[a, b]$, alors $f$ est aussi Lebesgue intégrable et les deux intégrales coïncident. De plus, dénotant $(\mathcal{R}) \int_a^b f$ l'intégrale de Riemann de $f$ et $\int_a^b f$ l'intégrale de Lebesgue, alors on a*

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f = \int_a^b f.$$

(1) Soit $P = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_k = b\}$ une partition de l'intervalle $[a, b]$ et on définit

$$u_P(x) = \inf_{x_i \leq x < x_{i+1}} f(x), \quad \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}), \quad i = 1, \cdots, k-1,$$

$$V_P(x) = \sup_{x_i \leq x < x_{i+1}} f(x), \quad \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}), \quad i = 1, \cdots, k-1.$$

Montrer que $u_P$ et $V_P$ sont deux fonctions étagées et donc mesurables par rapport à la tribu borélienne $\mathcal{B}([a, b])$.

(2) En déduire que si $(P_k)_{k+1}$ est une suite croissant de partitions (i.e. $P_k \subset P_{k+1}$, $k \geq 1$), alors on a

$$u_{P_k}(x) \leq u_{P_{k+1}}(x),$$

$$V_{P_k}(x) \geq V_{P_{k+1}}(x),$$

$$u_{P_k}(x) \leq f(x) \leq V_{P_k}(x), \quad \forall k \geq 1.$$

De plus, montrer que $u(x) = \lim_{k\to\infty} u_{P_k}(x)$ et $V(x) = \lim_{k\to\infty} V_{P_k}(x)$ sont bien définies et que

$$u(x) \leq f(x) \leq V(x).$$

(3) Soient

$$s(f, P) = \int_a^b u_P,$$

$$S(f, P) = \int_a^b V_P$$

les intégrales de Lebesgue de $u_P$ et $V_P$. Utilisant (1) donner une formule explicite pour $s(f, P)$ et $S(f, P)$.

(4) Sachant que $u_P$ et $V_P$ sont des fonctions étagées, montrer que si $f$ est Riemann intégrable, alors pour chaque $k \geq 1$ il existe une partition $P_k$ tel que

$$S(f, P_k) - s(f, P_k) \leq \frac{1}{k}.$$

De plus montrer que $P_{k+1}$ peut-être choisie comme un raffinement de $P_k$, cet-à-dire $P_k \subset P_{k+1}$, $k \geq 1$.

(5) En utilisant le théorème de la Convergence Monotone en déduire que

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b u_{P_k} = \lim_{k\to\infty} s(f, P_k) = \int_a^b u,$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b V_{P_k} = \lim_{k\to\infty} S(f, P_k) = \int_a^b V,$$

(6) En utilisant (4), (5) et la définition de l'intégrale de Riemann, en déduire que

$$\int_a^b u = \int_a^b V = (\mathcal{R}) \int_a^b f, \quad \int_a^b (V - u) = 0.$$

(7) Montrer que si $g : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ est une fonction Lebesgue intégrable tel que $\int_a^b g = 0$ alors $g = 0$ sauf sur un ensemble négligeable des points. Dans ce cas on dit que $g = 0$ presque partout (p.p.).

(8) Montrer que si $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ sont deux fonctions positives et intégrables selon Lebesgue et $h = g$ p.p. (remarque : $h = g$ p.p. signifie, par définition, $h - g = 0$ p.p.) alors $\int_a^b g = \int_a^b h$.

(9) Remarquant que $V - u \geq 0$ par (2), en déduire que $V = u$ p.p. ainsi que $f = u = V$ p.p., cf. (6) et (7).

En déduire que $f$ est Lebesgue intégrable et $(\mathcal{R}) \int_a^b f = \int_a^b f$, cf. (6) et (8).