Université Claude Bernard, Lyon 1
Année universitaire 2014 – 2015.

Licence de mathématique 3ème année
Mesure et intégration.

Devoir maison : clans, tribus et classes monotones.

NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Définition 1. *Soit X un ensemble, alors on dit qu'un ensemble $\mathscr{C}$ de parties de X est un clan (ou algèbre) si*
- *$\emptyset$ et X appartiennent à $\mathscr{C}$,*
- *Si $A \in \mathscr{C}$, alors le complémentaire $\bar{A}$ appartient à $\mathscr{C}$,*
- *Si $A, B \in \mathscr{C}$, alors $A \cup B \in \mathscr{C}$ (stable par union).*

Définition 2. *Soit X un ensemble, alors on dit qu'un ensemble $\mathscr{T}$ de parties de X est une tribu (ou σ - algèbre) si*
- *$\mathscr{T}$ est un clan,*
- *Si $A_n \in \mathscr{A}$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ alors $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathscr{A}$.*

Définition 3. *Soit X un ensemble, alors on dit qu'un ensemble $\mathscr{M}$ de parties de X est une classe monotone si*
- *$\emptyset$ et X appartiennent à $\mathscr{M}$,*
- *La réunion croissante d'éléments de $\mathscr{M}$ appartient à $\mathscr{M}$,*
- *L'intersection décroissante d'éléments de $\mathscr{M}$ appartient à $\mathscr{M}$.*

EXERCICES

Exercice 1. On commence par se familiariser avec les concepts de clan, tribu et classe monotone.

(1) Prouver que $\mathscr{C}$ est un clan si et seulement si
   - $\emptyset$ et X appartiennent à $\mathscr{C}$,
   - Si $A \in \mathscr{C}$, alors le complémentaire $\bar{A}$ appartient à $\mathscr{C}$,
   - Si $A, B \in \mathscr{C}$, alors $A \cap B \in \mathscr{C}$ (stable pas intersection).

   Donc on peut donner la définition de clan en remplaçant être stable par union avec être stable par intersection.

(2) Soit X un ensemble et $(\mathscr{C}_i)_{i\in I}$ une collection de tribus sur X. Montrer que $\bigcap_{i\in I} \mathscr{C}_i$ est une tribu, quelque soit la dénombrabilité de I.

(3) Soit $\mathscr{E}$ une collection de sous-ensembles de X. Démontrer qu'il existe une plus petite tribu contenant $\mathscr{E}$.

(4) Soit X un ensemble et $(\mathscr{C}_i)_{i\in I}$ une collection de classes monotones sur X. Montrer que $\bigcap_{i\in I} \mathscr{C}_i$ est une classe monotone, quelque soit la dénombrabilité de I.

(5) Soit $\mathscr{E}$ une collection de sous-ensembles de X. Démontrer qu'il existe une plus petite classe monotone contenant $\mathscr{E}$.

(6) Montrer qu'une tribu est une classe monotone.

Le but des trois prochaines exercices est de prouver le théorème suivant par étapes

Théorème 1. *Soit $\mathscr{C}$ un clan. Soient $\sigma(\mathscr{C})$ et $\mu(\mathscr{C})$ respectivement la plus petite tribu et la classe monotone contenant $\mathscr{C}$. Alors $\sigma(\mathscr{C}) = \mu(\mathscr{C})$.*

La preuve s'articule en trois étapes (Exercices 2, 3, 4). Chaque étape a un but indépendant qui est expliqué au début, mais chaque point de chaque exercice aide à résoudre les suivants.

Exercice 2. *Première étape : prouver que $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mu(\mathscr{C})$.*

(1) Soit A_n, $n = 1,2,3,...$ une collection d'ensembles. Alors $B_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ est une famille croissant, i.e. $B_n \subset B_{n+1}$.

(2) Montrer que si B_n, $n = 1,2,3,...$ est une famille croissante et $B = \bigcup_{n\geq 1} B_n$, alors $\bar{B}_n$, $n = 1,2,3,...$ est une famille décroissante et $\bar{B} = \bigcap_{n\geq 1} \bar{B}_n$.

(3) Soit $\mathscr{C}$ un clan. Si $\mathscr{C}$ est aussi une classe monotone, alors il doit être une tribu.

(4) Déduire que $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mu(\mathscr{C})$ (cf. Exercice 1,(6)).

Exercice 3. *Deuxième étape : prouver que $\mu(\mathscr{C})$ est une algèbre.*

Soit

$$\tilde{\mathscr{M}} = \left\{B \quad : \quad B \in \mu(\mathscr{C}) \text{ et } \bar{B} \in \mu(\mathscr{C})\right\}.$$

(1) Montrer que $\mathscr{C} \subset \tilde{\mathscr{M}} \subset \mu(\mathscr{C})$.

(2) Montrer que $\tilde{\mathscr{M}}$ est une classe monotone.

(3) En déduire que $\tilde{\mathscr{M}} = \mu(\mathscr{C})$.

(4) En déduire que $\mu(\mathscr{C})$ est stable par complémentaire, i.e. $A \in \mu(\mathscr{C})$ si et seulement si $\bar{A} \in \mu(\mathscr{C})$.

Soit $A \in \mu(\mathscr{C})$ fixé et on considère

$$\tilde{\mathscr{M}}_A = \left\{B \quad : \quad B \in \mu(\mathscr{C}) \text{ et } B \cap A \in \mu(\mathscr{C})\right\}.$$

(1) Montrer que $\tilde{\mathscr{M}}_A$ est une classe monotone.

(2) Montrer que $(B \in \tilde{\mathscr{M}}_A) \Leftrightarrow (A \in \tilde{\mathscr{M}}_B)$, $\forall A, B \in \mu(\mathscr{C})$.

(3) Montrer que si $A \in \mathscr{C}$, alors $\mathscr{C} \subset \tilde{\mathscr{M}}_A \subset \mu(\mathscr{C})$.

(4) En déduire que quelque soit $A \in \mathscr{C}$ on a $\tilde{\mathscr{M}}_A = \mu(\mathscr{C})$.

(5) En déduire que quelque soit $A \in \mu(\mathscr{C})$ on a $\tilde{\mathscr{M}}_A = \mu(\mathscr{C})$.

(6) En déduire que $\mu(\mathscr{C})$ est stable par intersection, i.e. $A, B \in \mu(\mathscr{C})$ implique $A \cap B \in \mu(\mathscr{C})$.

Exercice 4. *Troisième étape : prouver que $\mu(\mathscr{C}) \subset \sigma(\mathscr{C})$.*

(1) En déduire que $\mu(\mathscr{C})$ est un clan. Conclure que $\mu(\mathscr{C})$ doit être une tribu et donc $\mu(\mathscr{C}) \subset \sigma(\mathscr{C})$ (cf. Exercice 2,(3)).