Feuille d'exercices n° 5

Problèmes non linéaires.

Exercice 1. *Applications strictement contractantes.*

1. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on définit $\Phi_\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \lambda\, x$.
   À quelle condition sur λ Φ_λ est-elle strictement contractante ?
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $b \in \mathbf{R}^n$.
   On définit $\Phi_{A,b} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $x \mapsto A\,x + b$.
   (a) On fixe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbf{R}^n$.
   À quelle condition $\Phi_{A,b}$ est-elle strictement contractante pour $\|\cdot\|$?
   (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une norme pour laquelle $\Phi_{A,b}$ est strictement contractante.
   (c) Quel résultat trouve-t-on sur $I_n - A$?

Exercice 2. *Vitesses de convergence.*

Soit $(e_k)_{k\in\mathbf{N}} \in (\mathbf{R}_+)^{\mathbf{N}}$ une suite de normes d'erreurs associée à un méthode itérative.

1. On suppose que l'on dispose d'une estimation

$$\forall k \in \mathbf{N},\ e_k \ \leq\ C\,(C')^k$$

   avec $C = C' = \frac{1}{2}$.
   Quel nombre k_0 d'itérations faut-il pour que l'estimation précédente garantisse $e_{k_0} \leq 10^{-8}$?
   Indication numérique : $8\frac{\ln 10}{\ln 2} \in [26, 27[$.
2. On suppose désormais que l'on dispose d'une estimation

$$\forall k \in \mathbf{N},\ e_k \ \leq\ C\,(C')^{2^k}$$

   avec $C = 1$ et $C' = \frac{1}{2}$.
   Quel nombre k_0 d'itérations faut-il pour que l'estimation précédente garantisse $e_{k_0} \leq 10^{-8}$?
   Indication numérique : $\ln\left(8\frac{\ln 10}{\ln 2}\right) / \ln 2 \in [4, 5[$.

Exercice 3. *Méthode de Newton.*

1. On cherche à calculer les zéros de $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2 - 2$.
   (a) Montrer que chacun des zéros de f peut être approché par la méthode de Newton.
   (b) Écrire explicitement la relation de récurrence vérifiée par les suites des itérés.

(c) L'algorithme est-il globalement défini ?

2. On s'intéresse au système en $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$

$$\begin{cases} -5x_1 + 2\sin x_1 + 2\cos x_2 = 0, \\ -5x_2 + 2\sin x_2 + 2\cos x_1 = 0. \end{cases}$$

   (a) Récrire la recherche de solutions au système précédent comme la recherche de zéros d'une certaine fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$.

   (b) Montrer que chacun des zéros éventuels de f peut être approché par la méthode de Newton.

   (c) Écrire la relation de récurrence vérifiée par la suite des itérées et justifier que l'algorithme est globalement bien défini.

Exercice 4. *Méthode du gradient.*
Soit $a > 1$. On définit

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \quad (x, y) \mapsto a\,x^2 \;+\; y^2\,\cos(x)\,.$$

1. Montrer que f atteint un minimum local en 0.
2. Vérifier que pour tout $x \in \mathbf{R}$ le gradient de f en $(x, 0)$ est parallèle à $(1, 0)$.
3. Soit $\varepsilon > 0$ et $\rho \geq 0$. On pose $X_0 = (\varepsilon, 0)$ et l'on note $(X^{(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ la suite obtenue à partir de X_0 par la méthode du gradient à pas ρ.
   (a) Calculer $X^{(0)}$, $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$.
   (b) Étudier la convergence de $(X^{(k)})_{k\in\mathbf{N}}$.
   (c) Est-ce surprenant ?