Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2013-2014

Analyse numérique - L3

Contrôle final

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. Applications directes.

En répondant à ce qui suit l'étudiant veillera à donner une forme irréductible des rationnels.

1. On pose
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} .$$
   (a) Résoudre $Ax = b$ au sens des moindres carrés.
   (b) Le vecteur b appartient-il à l'image de A ?
2. On pose
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$
   (a) Donner une décomposition PLU de A.
   (b) En déduire l'inverse de A.
3. On pose
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} .$$
   (a) Résoudre $Ax = b$.
   (b) Quelle approximation obtient-on au bout de trois itérations de la méthode de Jacobi partant de $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?
4. On définit
$$f \,:\, \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,, \quad x \mapsto x^3 - 2\,.$$
   Quelle approximation de $2^{1/3}$ obtient-on après deux itérations en appliquant à f la méthode de Newton partant de $x_0 = 2$?
5. On définit
$$\varphi \,:\, \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}\,, \quad (x, y) \mapsto x^4 - 8x + y^4 - 8y\,.$$
   (a) Déterminer les minima locaux de φ.
   (b) Quelle approximation obtient-on au bout de deux itérations de la méthode du gradient à pas fixe $\rho = 1/12$ partant de $x_0 = (0, 0)$?
6. On considère $f \,:\, \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,, \quad x \mapsto x^4$. On note P la fonction affine par morceaux obtenue par interpolation des valeurs de f aux nœuds 0, $\frac{1}{2}$ et 1.

(a) Donner P explicitement.

(b) Calculer l'erreur relative commise en remplaçant $f(\frac{1}{4})$ par $P(\frac{1}{4})$.

7. On considère $f\ :\ [0,1] \to \mathbf{R}\,, \quad x \mapsto x^2$.

   (a) Que vaut $\displaystyle\int_0^1 f \quad ?$

   (b) Avec des nœuds équidistants de pas $\frac{1}{4}$ quelle approximation en fournit la méthode de quadrature composée dite des trapèzes ?

8. On considère le problème

$$x(0) \;=\; 0\,, \qquad x'(0)) \;=\; 1 \qquad \text{et} \qquad \big(\ \forall t \in \mathbf{R}_+\,, \quad x''(t) \;=\; -\,x'(t) \;-\; x(t) + t\,x'(t)\,x(t)^2\ \big)\ .$$

   (a) Récrire le problème comme un problème de Cauchy associé à un équation différentielle d'ordre 1.

   (b) Quelle approximation des valeurs $(x(1), x'(1))$ prises par la solution est donnée par le schéma d'Euler explicite de pas constant $\frac{1}{2}$?

<u>Exercice 2.</u> Méthode de la sécante.

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $x_* \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_*) = 0$ et $f'(x_*) \neq 0$.

1. Justifier qu'il existe $\eta_0 > 0$ tel que $f_{|[x_*-\eta_0, x_*+\eta_0]}$ soit injective et que $f'_{|[x_*-\eta_0, x_*+\eta_0]}$ ne s'annule pas.

2. Soit $(x, y) \in [x_* - \eta_0, x_* + \eta_0]^2$ tel que $x \neq y$.

   (a) Justifier que la droite passant par $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ intersecte l'axe des abscisses en un unique point, dont on notera l'abscisse $\phi(x, y)$.

   (b) Montrer que si $y = \phi(x, y)$ alors $y = x_*$.

   (c) Montrer que

$$\phi(x, y) \;-\; x_* \;=\; \frac{f[x_*, x, y]}{f[x, y]}\ (x - x_*)\,(y - x_*)$$

   où $f[\,\cdot\,]$ note les différences divisées de Newton associées à f.

On définit

$$K \;=\; \frac{\displaystyle\max_{[x_*-\eta_0, x_*+\eta_0]} |f''|}{2 \displaystyle\min_{[x_*-\eta_0, x_*+\eta_0]} |f'|} \qquad \text{et} \qquad \eta \;=\; \min\left(\left\{\eta_0\,,\ \frac{1}{1+K}\right\}\right)\ .$$

Par ailleurs, pour tout $x \in [x_* - \eta_0, x_* + \eta_0]$, on pose $\phi(x, x) = x$.

3. Montrer que si $(x, y) \in [x_* - \eta, x_* + \eta]^2$, alors $\phi(x, y) \in [x_* - \eta, x_* + \eta]$ et

$$|\phi(x, y) - x_*| \;\leq\; K\,|x - x_*|\,|y - x_*|\,.$$

4. On note $(\rho_n)_{n\in\mathbf{N}} \in (\mathbf{N}^*)^{\mathbf{N}}$ la suite de Fibonacci définie par $\rho_0 = 1$, $\rho_1 = 1$, et, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\rho_{n+2} \;=\; \rho_n \;+\; \rho_{n+1}.$$

   (a) Donner, pour tout $n \in \mathbf{N}$, une expression explicite de ρ_n.

   (b) Montrer que

$$\rho_n \;\overset{n\to\infty}{\sim}\; \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\ \rho_\infty^n\,,$$

   où $\rho_\infty = (1 + \sqrt{5})/2$ est le nombre d'or.

5. Soit $(x^{(0)}, x^{(1)}) \in [x_* - \eta, x_* + \eta]^2$. On définit par récurrence $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in ([x_* - \eta, x_* + \eta])^{\mathbf{N}}$ par $x_0 = x^{(0)}$, $x_1 = x^{(1)}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+2} = \phi(x_n, x_{n+1})$.
   (a) Monter que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$K\,|x_n - x_*| \;\leq\; \Big(K \max\Big(\Big\{\,|x^{(0)} - x_*|\,,\,|x^{(1)} - x_*|\,\Big\}\Big)\Big)^{\rho_n}\,.$$
   (b) En déduire qu'en particulier $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers x_*.

<u>Exercice 3.</u> Décomposition de champs de vecteurs.

Dans cet exercice toutes les fonctions sont supposées $\mathcal{C}^\infty$.

Soit $d \in \mathbf{N}^*$, $x_0 \in \mathbf{R}^d$ une donnée initiale et f, $g : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ deux champs de vecteurs. On cherche à approcher la solution du problème de Cauchy
$$x(0) \;=\; x_0 \qquad \text{et} \qquad \big(\,\forall t\,,\quad x'(t) \;=\; f(t, x(t)) \;+\; g(t, x(t))\,\big)\,. \tag{1}$$
À cet effet, on fixe un pas de temps $h > 0$ et l'on note $(t_n)_{n\in\mathbf{N}} = (n\,h)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des temps d'approximations. On se donne des flux numériques $\phi_f : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^d$ définissant un schéma numérique
$$\forall n \in \mathbf{N},\quad x_{n+1} \;=\; x_n \;+\; h\,\phi_f(t_n, x_n, h)$$
pour l'équation différentielle $\forall t,\ x'(t) = f(t, x(t))$ et $\phi_g : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^d$ définissant un schéma numérique
$$\forall n \in \mathbf{N},\quad x_{n+1} \;=\; x_n \;+\; h\,\phi_g(t_n, x_n, h)$$
pour l'équation différentielle $\forall t,\ x'(t) = g(t, x(t))$.

1. On définit un schéma pour (1) par, pour tout n,
$$x_n^{(1)} \;=\; x_n \;+\; h\;\phi_f(t_n, x_n, h) \qquad \text{puis} \qquad x_{n+1} \;=\; x_n^{(1)} \;+\; h\;\phi_g(t_n, x_n^{(1)}, h)\,.$$
   (a) Récrire explicitement ce schéma comme un schéma à un pas
$$\forall n \in \mathbf{N},\quad x_{n+1} \;=\; x_n \;+\; h\,\phi^L_{f+g}(t_n, x_n, h)\,.$$
   (b) Montrer que si ϕ_f et ϕ_g définissent des schémas consistants alors il en est de même pour ϕ^L_{f+g}.
2. On suppose désormais que ϕ_f et ϕ_g définissent des schémas consistants au moins à l'ordre 2. On définit un schéma pour (1) par, pour tout n,
$$x_n^{(1)} \;=\; x_n \;+\; \frac{h}{2}\;\phi_f\left(t_n, x_n, \tfrac{h}{2}\right) \qquad \text{puis} \qquad x_n^{(2)} \;=\; x_n^{(1)} \;+\; h\;\phi_g(t_n, x_n^{(1)}, h)\,,$$
   enfin
$$x_{n+1} \;=\; x_n^{(2)} \;+\; \frac{h}{2}\;\phi_f\left(t_n + \tfrac{h}{2}, x_n^{(2)}, \tfrac{h}{2}\right)$$
   (a) Récrire explicitement ce schéma comme un schéma à un pas
$$\forall n \in \mathbf{N},\quad x_{n+1} \;=\; x_n \;+\; h\,\phi^S_{f+g}(t_n, x_n, h)\,.$$
   (b) Montrer que ϕ^S_{f+g} définit un schéma consistant pour (1).
   (c) Vérifier que pour tout $(t, x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d$,
$$\partial_h \phi^S_{f+g}(t, x, 0) \;=\; \tfrac{1}{2}\,(\;\partial_t(f+g)(t,x) \;+\; \mathrm{d}_x(f+g)(t,x).((f+g)(t,x))\;)\;.$$
   (d) Qu'en conclure ?