Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2013-2014

Analyse numérique - L3

Devoir n° 2

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. Pour les paires (A, x_0) qui suivent :
- déterminer si les valeurs propres de A sont de modules distincts ;
- caluler les cinq premières itérations de la méthode de la puissance ;
- donner l'approximation de la plus grande valeur propre correspondant à la cinquième itération.

1. $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; 3. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Pour les triplets (f, X_0, ρ) qui suivent :
- déterminer les points critiques de f ;
- déterminer parmi ces points lesquels sont des minima locaux ;
- calculer le rayon spectral des Hessiennes aux minima locaux ;
- calculer les trois premières itérations de la méthode du gradient à pas fixe ρ et partant de X_0.

1. $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$, $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\rho = \frac{1}{2}$;
2. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto (x^2 - 1)^2$, $X_0 = 2$ et $\rho = \frac{1}{24}$.

Exercice 3. On cherche à approcher un zéro par dichotomie.
On note $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite des erreurs et l'on suppose que $e_0 \leq 4$.
Au bout de combien d'itérations n_0 peut-on garantir $e_{n_0} \leq 2^{-6}$?

Exercice 4. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. Pour tout $a \in \mathbf{R}$ tel que $|a| \leq 1$, la fonction $\Phi_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto a\,x$ possède un unique point fixe.
2. Pour tout entier $p \in \mathbf{N}^*$, si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ et $x_* \in \mathbf{R}$ est tel que $f(x_*) = \cdots = f^{(p-1)}(x_*) = 0$ et $f^{(p)}(x_*) \neq 0$, alors la méthode d'approximation de x_* basée sur la fonction d'itération
$$\Phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} x - p\,\frac{f(x)}{f'(x)} & \text{si } f'(x) \neq 0 \\ x & \text{sinon} \end{cases}$$
est localement convergente et au moins d'ordre 2.
3. Le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux nœuds $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$ et aux valeurs $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et $f_2 = 8$ est $P(X) = X^3$.

4. Le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux nœuds $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$ et aux valeurs $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et $f_2 = -1$ est $P(X) = X$.
5. Le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux nœuds $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$ et aux valeurs $f_0 = 1$, $f_1 = 0$ et $f_2 = 1$ est $P(X) = (X - 1)^2$.