Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2013-2014

Analyse numérique - L3

Devoir n$^{\text{o}}$ 1

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses.

Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. Pour les paires (A, b) qui suivent, résoudre $Ax = b$ au sens classique lorsque cela est possible, au sens des moindres carrés sinon. Pour chacun des cas on commencera par justifier soigneusement que la matrice A est injective.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Donner lorsqu'elle existe la décomposition LU des matrices qui suivent, et lorsque ce n'est pas possible en donner une décomposition PLU,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Donner la décomposition QR des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. Quel que soit le réel $a \in \mathbf{R}$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 2+a \end{pmatrix}$ est normale.
2. Quel que soit l'entier strictement positif $n \in \mathbf{N}^*$, toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui vérifie
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |A_{i,i}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |A_{i,j}|$$
est inversible.
3. Quel que soit le réel $a \in \mathbf{R}$, la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ admet une décomposition LU.
4. Avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, la suite de matrices $\left(A^k\right)_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers la matrice nulle.
5. Appliquée à $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, la méthode de Jacobi pour la résolution de systèmes linéaires converge.
6. Relativement à la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$, le conditionnement spectral de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est 2.