Université Lyon 1 | Année 2012-2013
Licence Mathématiques 3ème année
Analyse numérique

Contrôle final 17 janvier 2013

Durée : 3 heures

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (*Conditionnement, 5 points*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner la définition de la norme de la matrice A subordonnée à la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$. On la notera $\|A\|$.
2. Montrer que cette norme est une norme matricielle, *i.e.* pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.
3. On suppose dans la suite que A est inversible. Donner la définition du conditionnement de A. On le notera $\mathrm{cond}(A)$.
4. Montrer que $\mathrm{cond}(A) \geq 1$.
5. Soit $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$. Soit $\delta b \in \mathbb{R}^n$.
   (a) Justifier l'existence et l'unicité des vecteurs $x \in \mathbb{R}^n$ et $\delta x \in \mathbb{R}^n$ tels que $Ax = b$, $x \neq 0$ et $A(x + \delta x) = b + \delta b$.
   (b) Montrer que $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{cond}(A)\dfrac{\|\delta b\|}{\|b\|}$.
   (c) Que peut-on dire d'une matrice dont le conditionnement est très grand ?
6. Soit $\Delta A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|\Delta A\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$.
   (a) Montrer que $A + \Delta A$ est inversible.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\Delta x \in \mathbb{R}^n$ tels que $Ax = b$, et $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$. Montrer que $\dfrac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq \mathrm{cond}(A)\dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$.

Exercice 2. (*Interpolation polynômiale et méthode des trapèzes, 7 points*)

Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1, 1]$. On note $M = \max_{x\in[-1,1]} f''(x)$, et $m = \min_{x\in[-1,1]} f''(x)$.

1. *Calcul du polynôme d'interpolation.*
   (a) Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points -1 et 1. On le notera P_1.
   (b) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_1(x)dx$.

2. *Etude de la formule des trapèzes.*
   (a) On fixe $x \in]-1,1[$. On définit la fonction $u : [-1,1] \to \mathbb{R}$ par : pour tout $t \in [-1,1]$,
   $$u(t) = f(t) - P_1(t) - \frac{f(x) - P_1(x)}{(x+1)(x-1)}(t+1)(t-1).$$
   Montrer qu'il existe $\xi_x \in [-1,1]$ tel que $u''(\xi_x) = 0$. En déduire que
   $$f(x) - P_1(x) = \frac{f''(\xi_x)}{2}(x+1)(x-1).$$
   (b) En déduire que
   $$-\frac{2M}{3} \leq \int_{-1}^{1} f(x)dx - \Big(f(-1) + f(1)\Big) \leq -\frac{2m}{3}.$$
   (c) En déduire qu'il existe $\eta \in [-1,1]$ tel que $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx - \Big(f(-1) + f(1)\Big) = -\frac{2f''(\eta)}{3}$.
   Indication. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.
   (d) Soit a, b deux réels, $a < b$. Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $\theta \in [a,b]$ tel que
   $$\int_a^b F(x)dx - (b-a)\left(\frac{F(a) + F(b)}{2}\right) = -\frac{F''(\theta)}{12}(b-a)^3.$$
   Indication. Utiliser un changement de variable.
3. *Formule composée.* A partir de la formule précédente, on définit la méthode des trapèzes pour le calcul approché de l'intégrale d'une fonction g sur $[a,b]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on approche l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ par
   $$I_n(g) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g(x_k) + g(x_{k+1})}{2},$$
   où $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $0 \leq k \leq n$.
   (a) Faire un dessin illustrant la méthode.
   (b) Montrer que si g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$, alors
   $$\left|\int_a^b g(x)dx - I_n(g)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}\max_{x\in[a,b]}|g''(x)|.$$
   (c) Calculer $I_n(\cos)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour $a = 0$ et $b = 2\pi$. Comparer avec $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos x dx$.
   Indication. On pourra utiliser le fait que $\cos t$ est la partie réelle de e^{it}.

Exercice 3. (*Schémas numériques pour les équations différentielles, 8 points*)

A toutes fins utiles, on rappelle les deux développements limités suivants, au voisinage de 0 : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n), \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n). \end{aligned}$$

On s'intéresse à l'équation différentielle suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = -2y(t), \\ y(0) = 1. \end{array} \right. \tag{1}$$

Soit $\delta t > 0$ un pas de temps. On définit les suites $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{w_{n+1} - w_n}{\delta t} = -2w_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ w_0 = 1. \end{array} \right. \tag{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{y_{n+1} - y_n}{\delta t} = -2\,\dfrac{y_n + y_{n+1}}{2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ y_0 = 1. \end{array} \right. \tag{3}$$

1. Calculer la solution exacte du problème de Cauchy (1).
2. *Etude de $(w_n)_n$.*
   (a) A quelle méthode numérique correspond la définition de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (b) Calculer w_n en fonction de n pour tout n.
   (c) Soit $T > 0$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on note W_N l'élément w_N calculé par la méthode (2) avec $\delta t = T/N$. Montrer que
   $$\lim_{N\to+\infty} W_N = e^{-2T}.$$
3. *Etude de $(y_n)_n$.*
   (a) A partir de la définition (3), exprimer y_{n+1} en fonction de y_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = r^n$.
   (c) Montrer que pour tout $\delta t > 0$, $|r| < 1$. Pour quelles valeurs de δt la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle positive ?
   (d) Soit $T > 0$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on note Y_N l'élément y_N calculé par la méthode (3) avec $\delta t = T/N$. Montrer que
   $$\lim_{N\to+\infty} Y_N = e^{-2T}.$$
4. *Vitesse de convergence.* On cherche à quelle vitesse les suites $(W_N)_N$ et $(Y_N)_N$ convergent vers e^{-2T}.
   (a) Pour chacune de ces deux suites, déterminer l'équivalent, quand $N \to +\infty$, de $W_N - e^{-2T}$ et $Y_N - e^{-2T}$.
   (b) Quelle est la suite qui converge le plus vite vers e^{-2T} ?

5. *Le schéma de Crank-Nicolson.* La définition de la suite $(y_n)_n$ correspond à la méthode de Crank-Nicolson appliquée à l'équation (1). Pour une équation différentielle de la forme

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(y(t)\big), \\ y(0) \text{ donné.} \end{cases} \tag{4}$$

le schéma de Crank-Nicolson s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{y_{n+1} - y_n}{\delta t} = \dfrac{1}{2}\big(f(y_n) + f(y_{n+1})\big) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ y_0 = y(0). \end{cases} \tag{5}$$

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $t_n = n\delta t$. Montrer que si y est solution de (4) sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(t))dt.$$

(b) Sur quelle méthode d'intégration numérique appliquée à l'équation précédente est basé le schéma de Crank-Nicolson ? *Justifier la réponse.*