

PLANCHE D'EXERCICES III
- POLYNÔME MINIMAL - THÉORÈME DE CAYLEY-HAMILTON -

Exercice 1.* Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes, où $a \neq b$:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}.$$

Exercice 2.* Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme nilpotent de E .

1. Sans utiliser le polynôme minimal, montrer que le polynôme caractéristique de u est $p_u = (-1)^n X^n$. Comment procéder avec le polynôme minimal ?
2. Par récurrence, montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que la matrice de u dans la base \mathcal{B} soit triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.
3. Inversement, montrer que tout endomorphisme de E dont la matrice dans une base \mathcal{B} de E est triangulaire avec des 0 sur la diagonale est nilpotente d'indice de nilpotence $p \leq n$.

Exercice 3.* Soit $\mathbb{R}_n[X]$ le \mathbb{R} -espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Soit $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ l'application qui à un polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 1$.

1. Montrer que u est linéaire.
2. Calculer u^2 et en déduire que u est diagonalisable.

Exercice 4.* Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les matrices réelles suivantes soient diagonalisables :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}.$$

Exercice 5.*

1. Soit J une matrice complexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

- 1.1. Calculer J^p pour tout entier $p \in \{1, \dots, n\}$.
- 1.2. En déduire que J est diagonalisable.
- 1.3. Montrer que $\mathbf{1}_n, J, \dots, J^{n-1}$ sont linéairement indépendants.

- 1.4. Déterminer le polynôme minimal de J .
 - 1.5. Calculer les valeurs propres de J .
 - 1.6. Diagonaliser J en exhibant la matrice de passage.
2. Soit A la matrice circulante complexe suivante :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \dots & a_n & a_1 \end{bmatrix}$$

- 2.1. Exprimer A comme un polynôme en la matrice J .
- 2.2. Montrer que pour tout polynôme Q , $Q(J)$ est diagonalisable et que

$$\text{Sp}(Q(J)) = \{Q(\lambda) \mid \lambda \in \text{Sp}(J)\}.$$

- 2.3. En déduire que A est diagonalisable et calculer les valeurs propres de A .
- 2.4. Calculer le déterminant de A .

Exercice 6.★ Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère l'application linéaire trace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans \mathbb{R} qui à toute matrice associe la somme de ses coefficients diagonaux.

1. Déterminer l'image de la trace et la dimension de son noyau.
2. Montrer qu'on a une somme directe :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker trace} \oplus \text{Vect}(\mathbf{1}_n).$$

Soit u l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$u(\mathbf{A}) = \mathbf{A} + \text{trace}(\mathbf{A})\mathbf{1}_n.$$

3. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? Est-il inversible ?

Exercice 7.★ Soit u un endomorphisme inversible d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

1. Montrer que 0 ne peut pas être valeur propre de u .
2. En déduire que u^{-1} est un polynôme en u . [On pourra utiliser le fait que le polynôme X ne divise pas le polynôme caractéristique de u .]

Exercice 8.★ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E . Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que si P est premier avec le polynôme minimal m_u de u alors l'endomorphisme $P(u)$ est inversible.
2. Inversement, montrer que si $P(u)$ est inversible, alors les polynômes P et m_u sont premiers entre eux.

Exercice 9. Soient u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Montrer que la restriction de u au sous-espace F est un endomorphisme diagonalisable de F .

Exercice 10. Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E . On considère deux sous-espaces vectoriel F et G de E stables par u tels que

$$E = F \oplus G.$$

Si m_F et m_G désignent les polynômes minimaux des restrictions de u à F et G respectivement, montrer que le polynôme minimal m_u de u est donné par

$$m_u = \text{ppcm}(m_F, m_G).$$

Exercice 11.★ Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $X^3 = X$.

Exercice 12.★ L'objectif est de résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation

$$X^3 + X = 0. \quad (1)$$

Soit \mathbf{A} une matrice non nulle satisfaisant la relation (1).

1. Montrer que

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker } \mathbf{A} \oplus \text{Ker } (\mathbf{A}^2 + \mathbf{1}_3).$$

2. Déterminer le polynôme minimal de \mathbf{A} .

3. Montrer que si \mathbf{x} n'appartient pas à $\text{Ker } \mathbf{A}$, alors $(\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x})$ est libre.

4. Montrer que $\text{Ker } \mathbf{A}$ est de dimension 1. En déduire que \mathbf{A} est semblable à la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 13.★ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et P le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par

$$P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1X - a_0.$$

La matrice compagnon du polynôme P est la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

On note u l'endomorphisme de E représenté par la matrice \mathbf{A} dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E fixée.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de u est $p_u = (-1)^n P$.

2. Sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, montrer que le polynôme P est annulateur de u .

3. En déduire que P est le polynôme minimal de u .

Soient v un endomorphisme de E et \mathbf{x} un vecteur non nul de E . Soit p le plus grand entier tel que la famille $\mathcal{B}_x = (\mathbf{x}, v(\mathbf{x}), \dots, v^p(\mathbf{x}))$ soit libre.

4. Montrer que le sous-espace

$$E_x = \text{Vect}(\mathbf{x}, v(\mathbf{x}), \dots, v^p(\mathbf{x})),$$

est stable par v .

5. Montrer que la matrice dans la base \mathcal{B}_x de la restriction de l'endomorphisme v au sous-espace E_x est une matrice compagnon.

6. Écrire le polynôme associé à cette matrice compagnon.

7. En déduire que le polynôme caractéristique de v vérifie $p_v(\mathbf{x}) = 0$.

8. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 14.★ Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n . Un endomorphisme u de E est dit cyclique s'il existe un vecteur \mathbf{x} de E tel que la famille $\mathcal{B}_x = (\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \dots, u^{n-1}(\mathbf{x}))$ soit une base de E .

1. Écrire la matrice de u dans la base \mathcal{B}_x est une matrice compagnon.

2. Montrer qu'un endomorphisme cyclique possède une unique matrice compagnon.

3. Montrer qu'un endomorphisme cyclique de E est diagonalisable si et seulement s'il possède n valeurs propres distinctes.

Exercice 15. Soient \mathbb{K} un corps commutatif et E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n . On note $\mathcal{L}(E)$ le \mathbb{K} -espace vectoriel formé des endomorphismes de E . Pour tout endomorphisme u de E , on définit l'application

$$D_u : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ f \longmapsto u \circ f.$$

1. Montrer que D_u est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n et tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, on a

$$(D_u)^n(f) = u^n \circ f.$$

En déduire que, pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, on a

$$P(D_u) = D_{P(u)}.$$

3. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si D_u est diagonalisable.
4. Soient $(\mathbf{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et u un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $(\mathbf{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$ est notée M . Soit $(\mathbf{e}_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une base de $\mathcal{L}(E)$ définie par

$$\mathbf{e}_{i,j}(\mathbf{e}_k) = \delta_{j,k} \mathbf{e}_i,$$

où $\delta_{j,k} = 1$ si $j = k$ et $\delta_{j,k} = 0$ si $j \neq k$. Montrer que la matrice de D_u dans la base

$$(\mathbf{e}_{1,1}, \dots, \mathbf{e}_{n,1}, \mathbf{e}_{1,2}, \dots, \mathbf{e}_{n,2}, \dots, \mathbf{e}_{1,n}, \dots, \mathbf{e}_{n,n}),$$

s'écrit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & & & 0 \\ & \mathbf{M} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbf{M} \end{bmatrix}.$$

Dans la suite, on suppose que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2. On considère la base \mathcal{B} de $\mathcal{L}(E)$, formée des endomorphismes représentés dans la base canonique par les matrices E_i suivantes :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soit u l'endomorphisme de E représenté dans la base canonique par la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Montrer que u est diagonalisable.
6. Écrire la matrice de D_u dans la base \mathcal{B} .
7. Diagonaliser D_u .