Université Claude Bernard Lyon 1 - automne 2013
Licence Sciences, Technologies, Santé - mention mathématiques

UE Math III Algèbre - MAT2020L

PLANCHE D'EXERCICES II

- MISE EN BOUCHE -

Exercice 1. Trouver des bases de l'espace des lignes et de l'espace des colonnes de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Quelles sont les dimensions des noyaux de l'application linéaire représentée par $\mathbf{A}$ et de celle représentée par sa transposée. Déterminer des bases de ces noyaux.

Exercice 2. Soit $\mathcal{T}^s$ (resp. $\mathcal{T}^i$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\mathcal{T}^s$ et $\mathcal{T}^i$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}^s + \mathcal{T}^i$. Cette somme est-elle directe ?
3. Quels sont les dimensions des sous-espaces $\mathcal{T}^s$ et $\mathcal{T}^i$?
4. Montrer que toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

Exercice 3. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E vérifiant $u^2 = \mathrm{id}_E$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{id}_E)$.
2. Montrer que si $u \neq \mathrm{id}_E$ et $u \neq -\mathrm{id}_E$, alors il existe une base de E dans laquelle l'endomorphisme u est représenté par la matrice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}_q \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{1}_p$ et $\mathbf{1}_q$ désignent les matrices identités de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ at $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ respectivement.

3. Montrer que les entiers p et q ne dépendent que de u.

Exercice 4. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et $B = (e_1, e_2)$ une base de E. Soit u l'endomorphisme de E représenté dans la base B par la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que $u^2 = 0$
2. Déterminer le rang, l'image et le noyau de u.
3. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 5. On considère les deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{bmatrix}.$$

1. Écrire $\mathbf{A}$ comme combinaison linéaire de $\mathbf{J}$ et $\mathbf{1}_n$.
2. Calculer $\mathbf{J}^k$ et $\mathbf{A}^k$, pour tout entier k.

Exercice 6. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ par la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a. Déterminer le rang de u. En déduire que 0 est valeur propre de u.

b. Montrer que $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$ est vecteur propre de u.

c. Construire une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de u.

Exercice 7. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ par la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a. Calculer $u(\mathbf{e}_2)$, $u(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)$ et $u(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)$.

b. En déduire que u est diagonalisable et écrire la matrice de u dans une base de vecteurs propres.

c. Donner une interprétation géométrique de u.

Exercice 8. Montrer que la matrice suivante n'est pas diagonalisable :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 9. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{C}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

a. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme u.

b. Montrer sans calcul qu'il existe une base de $\mathbb{C}^3$ formée de vecteurs propres.

c. Déterminer la matrice de passage de la base canonique à la base formée de vecteurs propres.

d. L'endomorphisme u est-il diagonalisable sur les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$?

Exercice 10. Diagonaliser ou trigonaliser dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, en donnant la matrice de passage, les matrices suivantes :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Exercice 11. Discuter en fonction de a, b et c la possibilité de diagonaliser les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Exercice 12. Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que si λ est une valeur propre complexe de $\mathbf{A}$, alors $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre de $\mathbf{A}$, de même ordre de multiplicité.

b. Montrer que si $\mathbf{v}$ est un vecteur propre associé à λ, alors $\bar{\mathbf{v}}$ est un vecteur propre associé à $\bar{\lambda}$.

Exercice 13. **a**. Diagonaliser en donnant une matrice de passage la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

b. Calculer $\mathbf{A}^k$ pour tout entier naturel k avec et sans utiliser la diagonalisation.

Exercice 14. On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$u(P) = (X^2 - 1)P'' + 3XP'.$$

a. Écrire la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Montrer que u est diagonalisable.

c. Résoudre l'équation $u(P) = P$.

Exercice 15. Soit u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$u\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Montrer que l'endomorphisme u est diagonalisable et construire une base de vecteurs propres de u.

Exercice 16. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
En diagonalisant $\mathbf{A}$, trouver une solution dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ à l'équation $X^2 = \mathbf{A}$.

Exercice 17. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E de rang un.

a. Montrer que la trace de u est une valeur propre de u.

b. En déduire que u est diagonalisable si, et seulement si, sa trace est non nulle.

Exercice 18. On considère la matrice complexe

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}.$$

a. Quelle est la somme des valeurs propres de $\mathbf{A}$?

b. Quel est le produit des valeurs propres de $\mathbf{A}$?

c. Montrer que, si son déterminant n'est pas nul, $\mathbf{A}$ est diagonalisable.

d. Montrer que, si son déterminant est nul, $\mathbf{A}$ n'est diagonalisable que si elle est nulle.

e. Montrer que $\mathbf{A}$ est diagonalisable sauf si elle est de rang un.

f. En supposant que la matrice $\mathbf{A}$ est réelle ; à quelle condition est-elle diagonalisable par un changement de base réel ?