Contrôle continu - Jeudi 7 novembre 2013

durée : 2h)

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1
Le but de cet exercice est de montrer que l'unique solution dans $\mathbb{Z}^3$ de l'équation $x^2 + y^2 = 7z^2$ est $(0, 0, 0)$.

Supposons qu'il existe des entiers a, b et c non tous nuls vérifiant $a^2 + b^2 = 7c^2$.

1. Vérifier que a et b ne sont pas tous les deux nuls.
2. Montrer que si a et b sont divisibles par 7 alors c l'est également.
3. Montrer qu'il existe des entiers a', b' et c' vérifiant $a'^2 + b'^2 = 7c'^2$ et tels que a' et b' ne sont pas tous deux divisibles par 7.
4. Soit $x \in \mathbb{Z}$. Vérifier que x^2 est congru à 0, 1, 2 ou 4 modulo 7.
5. Conclure.

Exercice 2
Soit G un groupe ayant au moins 2 éléments dont les seuls sous-groupes sont $\{e\}$ et G.

1. Montrer que G est monogène.
2. Montrer que G est fini.
3. Montrer que le cardinal de G est premier.

Exercice 3 On considère dans S_9 les permutations :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 4 & 2 & 8 & 1 & 9 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 3 & 5 & 4 & 2 & 7 & 6 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

1. Donner la décomposition de σ et τ en cycles à supports disjoints.
2. Calculer les ordres de σ et τ.
3. Les deux permutations σ et τ sont-elles conjuguées ?
4. Calculer l'ordre de $\sigma\tau$.
5. Combien y-a-t-il d'éléments dans S_9 conjugués à σ ?