UCBL 2012/2013 - Semestre d'automne - UE de topologie
Fiche 4 : espaces séparables, espaces de Hilbert

Espaces séparables

Exercice 1. Montrer que pour $1 \leq p < +\infty$, les espaces $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ et $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, sont séparables.

Exercice 2.

1. Soit (X, d) un espace métrique. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$, un ensemble I infini non dénombrable et $(x_i)_{i\in I} \subset X$ tels que

$$d(x_i, x_j) \geq \varepsilon, \qquad \forall i, j \in I, i \neq j.$$

   Montrer que (X, d) n'est pas séparable.

2. En considérant les suites formées de 0 et de 1, montrer que ℓ^∞ n'est pas séparable.

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique.

(a) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

   (i) L'espace (X, d) est séparable.

   (ii) La topologie de X est à base dénombrable, c'est-à dire qu'il existe une suite d'ouverts $(U_n)_{n\geq 1}$ de X tel que tout ouvert U de X s'écrive comme la réunion d'ouverts U_n.

(b) On suppose maintenant que (X, d) est séparable. En déduire que toute partie de E, munie de la topologie induite, est séparable.

Nous allons voir dans l'exercice suivant que ce résultat n'est plus vrai dans un espace topologique quelconque.

Exercice 4. Soit $\mathcal{B}$ la famille des rectangles semi-ouverts du plan $\mathbb{R}^2$ de la forme

$$[a, b) \times [c, d) = \{(x, y) : a \leq x < b,\ c \leq y < d\}.$$

(a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base d'une topologie τ sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer que la topologie induite τ_D sur la droite

$$D = \{(x, y) : x + y = 0\}$$

   est la topologie discrète.

(c) Montrer que $(\mathbb{R}^2, \tau)$ est séparable mais que (D, τ_D) n'est pas séparable.

Exercice 5.

1. Soit I un ensemble fini et pour tout $i \in I$, X_i un espace topologique, $X_i \neq \emptyset$. Considérons

$$X := \prod_{i\in I} X_i$$

   muni de la topologie produit. Montrer que si pour chaque $i \in I$, X_i est séparable, alors X est séparable.

2. (plus difficile) On suppose maintenant que I est dénombrable. Démontrer que la conclusion de l'exercice précédente reste vraie.

Espaces de Hilbert

Exercice 6. Soit $(x_n) \subset H$ et $x \in H$, où H est un espace de Hilbert. On dit que (x_n) converge faiblement vers x si et seulement si $\forall\, y \in H\colon (x_n, y) \to (x, y)$. On écrit dans ce cas $x_n \rightharpoonup x$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $x_n \to x$
2. $x_n \rightharpoonup x$ et $\|x_n\| \to \|x\|$.

Exercice 7. Montrer que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels fermés et orthogonaux d'un espace de Hilbert H, alors $F + G$ est fermé.

Exercice 8. (caractérisation des projections sur un sous-espace) Soient H un espace de Hilbert et $p \in \mathcal{L}(H)$ avec $p \neq 0$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe un sous-espace vectoriel fermé F de H tel que $p = p_F$ (projecteur orthogonal de H sur F),

(ii) $p^2 = p$ (i.e. p est idempotente)

Exercice 9. Calculer, à l'aide du théorème des projections,

$$\inf_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} \left|x^3 - a - bx - cx^2\right|^2 \, dx.$$

Exercice 10. Soient H un espace de Hilbert séparable et $\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ une base orthonormale de H.

1. Démontrer que, pour tout $x \in H$, les séries

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x|e_n\rangle e_{n+1} \quad \text{et} \quad S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x|e_n\rangle e_{n-1}$$

   sont convergentes. Les applications R et S sont alors bien définies.

2. Montrer que R et S sont des applications linéaires et continues de H dans H.
3. Montrer que R est une isométrie qui n'est pas surjective.
4. Montrer que S est surjective mais pas injective.
5. On dit que λ est une valeur propre d'une application linéaire $T\colon H \to H$ s'il existe $x \in H$, $x \neq 0$, tel que $T(x) = \lambda x$.

   (a) Quelles sont les valeurs propres de R ?

   (b) Soit S une valeur propre de S. Montrer que la suite (λ^n) appartient à ℓ^2.

   (c) Montrer que l'ensemble des valeurs propres de S est $\{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| < 1\}$.