UCBL 2012/2013 - Semestre d'automne - UE de topologie
Fiche 1: Espace métrique et espace vectoriel normé

Exercice 1. Les applications suivantes, de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$, sont-elles des distances sur $\mathbb{R}$?
1. $d_1(x, y) = (x - y)^2$ 2. $d_2(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ 3. $d_3(x, y) = |x - 2y|$.

Exercice 2. Pour chacune des normes $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, dessiner $\bar{B}(0, 1)$.

Exercice 3.
1. Donner un exemple d'une intersection d'ouverts qui n'est pas un ouvert.
2. Donner un exemple d'une réunion de fermés qui n'est pas un fermé.
3. Soit (X, d) un espace métrique.
   (a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in X \times X$ tel que $x \neq y$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$. Qu'en déduire ?
   (b) Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans $\mathbb{R}_+$. On pose $r = \inf\{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $R = \sup\{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et on fixe $a \in X$. Expliciter à l'aide de r et R :
   $$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(a, r_n) \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{B}(a, r_n).$$
4. Soient E un espace vectoriel normé et A et B deux parties non vides de E. On pose $A + B = \{a + b;\ a \in A,\ b \in B\}$. Montrer que si B est un ouvert de E alors $A + B$ l'est aussi.

Exercice 4. Déterminer l'ensemble des normes sur $\mathbb{R}$ vu comme espace vectoriel réel.

Exercice 5. Soit (X, d) un espace métrique. Rappeler la définition de la topologie donnée par d. Montrer que toute boule ouverte est un ouvert de X et que toute boule fermée est un fermé de X.

Exercice 6. Soit X un ensemble non vide. Donner trois exemples de topologie sur X pour laquelle l'ensemble des ouverts coïncide avec celui des fermés.

Exercice 7. Soit $\mathcal{T}$ une topologie sur un ensemble infini X. On suppose que toute partie non-finie de X est un ouvert de X. Montrer $\mathcal{T}$ est la topologie discrète.

Exercice 8. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A, B \subset X$. On suppose que A est ouvert.
1. Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.
2. Donner un contre-exemple dans $\mathbb{R}$ si on ne suppose pas A ouvert

Exercice 9. Soit X un ensemble ayant au moins deux éléments. Pour $x, y \in X$, on pose $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et $d(x, x) = 0$.
1. Montrer que d est une distance sur X.
2. Montrer que tout singleton de X est à la fois ouvert et fermé dans X.
3. Soit $x_0 \in X$. Comparer les ensembles suivants :
   (a) la boule ouverte $B(x_0, 1)$,
   (b) la boule fermée $\bar{B}(x_0, 1)$,

(c) l'adhérence $\overline{B(x_0, 1)}$ de la boule ouverte $B(x_0, 1)$,

(d) L'intérieur de la boule fermée $\bar{B}(x_0, 1)$.

4. Existe-t-il une norme sur X donnant lieu à la même topologie que d ? (Voir l'ex. 7.)

Exercice 10. Soient $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé (réel), $r > 0$ un nombre réel et $a \in E$.

1. Montrer que l'intérieur de la boule fermée $\bar{B}(a, r)$ est la boule ouverte $B(a, r)$. Ce résultat est-il vrai dans tous les espaces métriques ?

2. Montrer que l'adhérence de la boule ouverte $B(a, r)$ est la boule fermée $\bar{B}(a, r)$. Est-ce vrai dans tout espace métrique ?

Exercice 11. Trouver un exemple d'espace métrique X possédant une partie A tel que les ensembles suivants soient distincts deux à deux : A, $\mathring{A}$, $\overline{A}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$.

Exercice 12. Soit X un ensemble muni de deux métriques d_1 et d_2 quasi-isométriques (on dit parfois "métriquement équivalentes"). Montrer que les topologies données par ces métriques sont égales (on dit parfois que d_1 et d_2 sont "topologiquement équivalentes").

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel muni de deux normes N_1 et N_2. donnant la même topologie. Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.
Indication : Considérer l'ouvert $B_{N_1}(0, 1)$ (pour quelle topologie ?).

Exercice 14. Soit (X, d) un espace métrique.

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction croissante telle que pour tous $u, v \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(u) = 0 \iff u = 0$, et $\varphi(u + v) \leq \varphi(u) + \varphi(v)$. Pour $x, y \in X$, on pose $\delta(x, y) = \varphi(d(x, y))$. Montrer que δ est une distance sur X.

2. On suppose (X, d) non borné (i.e. $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists x, y \in X,\ d(x, y) > A$). On définit δ sur X^2 en posant $\delta(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$.

   (a) Montrer que δ est une métrique sur X.

   (b) Montrer que d et δ donnent la même topologie sur X (i.e. sont topologiquement équivalentes).

   (c) Montrer que d et δ ne sont pas quasi-isométriques.

   (d) Montrer que si $X = \mathbb{R}$ et d est la distance usuelle alors δ n'est induite par aucune norme.

Exercice 15. Soit (E, d) un éspace métrique. Soit (u_n) une suite de E qui converge vers l. Montrer que $\{u_n / n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est un fermé de E.

Exercice 16. 1. Quelle est la nature des ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle ? Décrire leur intérieur, leur adhérence.

2. On considère $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ munis de la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}$. Pour ces deux espaces :

   (a) La topologie est-elle séparée ?

   (b) Un singleton est-il ouvert ? Fermé ?

3. Soit $E = \mathbb{N}$ muni de la topologie suivante : pour toute partie F distincte de E et de $\emptyset$, F est un fermé si et seulement si F est un ensemble fini de nombres non nuls. Montrer que E est un espace topologique et que l'adhérence de $\{0\}$ est E.

Exercice 17. Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles muni de la topologie donnée par la norme $\| \|_\infty$ ainsi définie : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

1. Montrer que $A := \{f \in E;\ f(x) > 0\ \forall x \in [0,1]\}$ est ouvert.
2. Montrer que $B := \{f \in E;\ \exists x \in [0,1],\ f(x) = 0\}$ est fermé.
3. Déterminer la frontière de $C := \{f \in C([0,1]) | f(0) > 0\}$.
4. Montrer que $A \subset E$ n'est pas ouvert pour la topologie définie par la norme $||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$.
5. Les normes $\| \|_\infty$ et $\| \|_1$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 18. Soit $E = l^\infty(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme $\| \|_\infty$, celle-ci étant définie ainsi : $\|(x_n)\|_\infty = \sup\{|x_n|; n \in \mathbb{N}\}$.

1. Soit $A \subset E$ l'ensemble des suites qui convergent vers 0. Montrer que A est fermé dans E.
2. Soit $B \subset A$ l'ensemble des suites dont le terme est nul à partir d'un certain rang. Montrer que B est dense dans A mais n'est pas dense dans E.

Exercice 19. Dans $\mathbb{R}$, on pose $d(x,y) = 0$ si $x = y$ et $d(x,y) = |x| + |y|$ sinon.

1. Montrer que d est une distance.
2. Déterminer toutes les boules ouvertes et fermées : $B(x,r)$ et $\bar{B}(x,r)$ avec $x \in \mathbb{R}$, $r > 0$.
3. Montrer que toute boule ouverte est un fermé. Comparer ensuite $\bar{B}(x,r)$ avec $\overline{B(x,r)}$.
4. Que peut-on dire d'une suite réelle dont la limite est 1, dans $\mathbb{R}$ muni de la distance d ?
5. La topologie donnée par d peut-elle être issue d'une norme ?

Exercice 20. Soit E un espace vectoriel (réel ou complexe) de dimension finie. Le but de l'exercice est de montrer que toutes les normes de E sont équivalentes.

1. Ici on montre pour commencer que le résultat est vrai pour $E = \mathbb{R}^n$.
   (a) Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un réel C tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $N(x) \leq C\|x\|_1$.
   (b) Montrer que tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,
   $$|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq C\|x\|_1.$$
   En déduire que N est continue pour la topologie définie par la norme $\| \|_1$.
   (c) Montrer que $A := \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\|_1 = 1\}$ est compact pour la topologie définie par $\| \|_1$.
   (d) Utiliser (b) et (c) pour montrer l'existence de $C' \in \mathbb{R}$ tel que $\| \|_1 \leq C'N$.
2. Conclure.