

UCBL 2012/2013 - Semestre d'automne - UE de topologie
Fiche 2 : limite et continuité

Exercice 1. Ici, \mathbb{R} est muni de la métrique usuelle.

1. Montrer que $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2)$ n'est pas uniformément continue.
2. Montrer que $(\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x})$ est uniformément continue.
3. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f' est bornée sur \mathbb{R} . Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 2. Pour tout $n \geq 1$, soit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f_n(x) = nx$ si $x < \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = 1$ si $x \geq \frac{1}{n}$. Montrer que f_n converge simplement mais pas uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 3. Pour chacune des situations suivantes, donner un exemple d'espace topologique X .

1. X est infini et les seules suites convergentes sont constantes à partir d'un certain rang.
2. X est infini et toute suite converge vers tout point de X .
3. X est un espace métrique de cardinal fini > 1 tel que toute suite convergente est constante à partir d'un certain rang.
4. X est métrique et toute suite admet une valeur d'adhérence.

Exercice 4. Soient X un espace topologique séparé et (x_n) une suite de X .

1. Montrer que (x_n) admet au plus une limite.
2. On suppose qu'il existe un nombre premier $p > 2$ tel que les suites $(x_{2n}), (x_{2n+1})$ et (x_{pn}) convergent. La suite (x_n) converge-t-elle nécessairement ?
3. On suppose que pour tout nombre premier p , (x_{pn}) converge. La suite (x_n) converge-t-elle nécessairement ?

Exercice 5. Soient (X, d) un espace métrique, U un ouvert de X et A et B des parties de X .

1. Montrer que si A est dense dans B et B est dense dans X alors A est dense dans X .
2. Montrer que si A et U sont dense dans X alors $A \cap U$ l'est aussi.

Exercice 6. Soit (X, d) un espace métrique et $(x_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ une suite de X . On suppose que pour tout m , $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{m,n} = x_m$ et que $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x$. Montrer que $(x_{m,n})$ admet une sous-suite de la forme $(x_{k,n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,n_k} = x$.

Exercice 7. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|; t \in [0, 1]\}$. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales qui converge dans E vers une fonction non polynomiale. Montrer que la suite des degrés des P_n tend vers l'infini.

Exercice 8. Soient X_1, \dots, X_n, Y des espaces topologiques. Notons $X = X_1 \times \dots \times X_n$. On munit X de la topologie produit. Pour $i = 1, \dots, n$, notons $\pi_i : X \rightarrow X_i$ la projection naturelle. Soit $f : Y \rightarrow X$ une application.

1. Montrer que chaque π_i est continue.
2. Montrer que f est continue ssi pour tout i , $\pi_i \circ f$ est continue.

3. Montrer que chaque π_i est une application ouverte (i.e. envoie un ouvert sur un ouvert).
4. Montrer que les π_i ne sont pas nécessairement des applications fermées (considérer par exemple l'hyperbole d'équation $xy = 1$ dans \mathbb{R}^2).

Exercice 9. Soient X, Y deux espaces topologiques et f une application de X dans Y . Supposons que $X = A \cup B$.

1. Montrer que si f est continue, alors $f|_A$ et $f|_B$ sont continues (A et B sont munis de la topologie induite).
2. Montrer que la réciproque n'est pas vraie en général.
3. Montrer que si A et B sont ouverts (ou fermés) alors la réciproque est vraie, i.e. si $f|_A$ et $f|_B$ sont continues alors f est continue.

Exercice 10. Soient X un espace topologique et $A \subset X$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction indicatrice de A , $\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$, soit continue. On rappelle que $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ sinon.

Exercice 11. (E, d) étant un espace métrique, montrer que l'application distance $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Exercice 12. Soient E, F deux espaces métriques et $f, g : E \rightarrow F$ deux applications continues.

1. Montrer que $\Delta = \{x \in E : f(x) = g(x)\}$ est un fermé de E .
2. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que si A est dense dans E et si $f|_A = g|_A$ alors $f = g$.
3. Montrer que $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$.
4. Montrer que cette implication n'est pas vraie : Γ_f fermé $\implies f$ continue. *Indication* : on pourra considérer $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par : $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.

Exercice 13.

1. Soient X, Y deux espaces topologiques. On suppose Y séparé. Soient $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues.
 - (a) Montrer que $\{x \in X | f(x) = g(x)\}$ est un fermé de X .
 - (b) En déduire que si f et g coïncident sur une partie dense de X alors $f = g$.
2. Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{-1}^1 f(x)x^n dx = 0$. Montrer que f est nulle.
Indication : on pourra considérer l'application $\varphi : \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $g \mapsto \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$.

Exercice 14. Soit (E, d) un espace métrique. Pour une partie A de E , on définit la fonction distance à A , $d(\cdot, A) : E \rightarrow \mathbb{R}$, par

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) | y \in A\}.$$

1. Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $d(\cdot, A)$ est 1-lipschitzienne (i.e. qu'elle vérifie

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y), \quad \forall x, y \in E).$$

2. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que l'ensemble $\{x \in E : d(x, A) < d(x, B)\}$ est ouvert.
3. Montrer que si F et G sont deux fermés disjoints de E , il existe deux ouverts U et V tels que

$$F \subset U, G \subset V, U \cap V = \emptyset.$$