UCBL 2012/2013 - Semestre d'automne - UE de topologie
Fiche 3 : continuité - complétude

Exercice 1. Soient $A = [0,1[\cup\{2\}$ et $B = [0,1]$ deux parties de $\mathbb{R}$ munies de la topologie induite. Soit $f : A \to B$ donnée par $f(2) = 1$ et $f(x) = x$ si $x \in [0,1[$. Montrer que f est continue et bijective mais n'est pas un homéomorphisme.

Exercice 2. Soit $(E_1, \| \, \|_1)$ et $(E_2, \| \, \|_2)$ deux espaces vectoriels normés. Soit $f : E_1 \to E_2$ une application linéaire. Notons S la sphère unité de E_1. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes.

1. f est continue.
2. La restriction de f à S est bornée.
3. Il existe $x_0 \in E_1$ tel que f soit continue en x_0.

Exercice 3. Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$. Pour $c \in [0,1]$, on considère

$$\begin{array}{rccl} \delta_c : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & f(c). \end{array}$$

Montrer que δ_c est linéaire, continue si E est muni de la norme $\| \, \|_\infty$ mais pas continue si E est muni de la norme $\| \, \|_1$.

Exercice 4. Soient $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, $F = (\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \| \, \|_\infty)$. Soit $D : E \to F$ l'application dérivée, i.e. $D(f) = f'$.

1. Montrer que D est continue si E est muni de la norme suivante : $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.
2. Montrer que D n'est pas continue si on munit E de la norme $\| \, \|_\infty$.

Exercice 5. Notons X l'ensemble des suites réelle (x_n) dont le terme est nul à partir d'un certain rang. On munit X de la norme infinie : $\|(x_n)\| = \sup\{|x_n|; n \in \mathbb{N}\}$. Notons X^* le dual algébrique de X et $X' \subset X^*$ le dual topologique de X. Enfin notons S l'ensemble des suites réelles.

1. Montrer que X^* s'identifie à S via l'application $\varphi : S \ni a \mapsto \varphi_a \in X^*$ où pour $x = (x_n) \in X$, on a $\varphi_a(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x_n$.
2. Montrer alors que X' est isométriquement isomorphe à $(l^1(\mathbb{R}), \| \, \|_1)$.

Exercice 6. Dans les trois cas suivants, $\mathbb{R}$ muni de la métrique d est-il complet ?

1. $d(x,y) = |x^3 - y^3|$.
2. $d(x,y) = |\exp(x) - \exp(y)|$.
3. $d(x,y) = \ln(1 + |x - y|)$.

Exercice 7. Soient (X, d) un espace métrique et A une partie de X muni de la topologie induite.

1. Montrer que si A est complet alors A est fermée dans X.
2. Montrer que si X est complet et A fermée dans X alors A est complet.

Exercice 8. Soient X un ensemble, d et d' deux distances métriquement équivalentes sur X. Montrer que (X, d) est complet si s. si (X, d') l'est.

Exercice 9. On considère l'ensemble $X =]0, +\infty[$ muni des métriques d et d' definies ainsi : $d(x, y) = |x - y|$ et $d'(x, y) = |\ln(x) - \ln(y)|$. Montrer que (X, d) et (X, d') sont homéomorphes, que (X, d') est complet mais que (X, d) ne l'est pas.

Exercice 10. Soient (X, d) et (X', d') deux espaces métriques et soit $f : X \to X'$ une application. On suppose que toute suite de Cauchy de X s'envoit par f sur une suite de Cauchy de X'. Montrer que f est continue.

Exercice 11. Le but de l'exercice est de montrer que $E = (\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$ est de Banach. Soit (f_n) une suite de Cauchy de E.

1. Montrer que (f_n) est simplement convergente. On notera f la limite (simple).
2. Montrer qu'une sous-suite $(f_{n_k})_k$ de (f_n) converge uniformément vers f.
3. Conclure.

Exercice 12. Soit $E = (l^1, \|\ \|_1)$.

1. Soit $\{(a_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}} | m \in \mathbb{N}\} \subset E$ une suite de Cauchy. Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la suite $(a_n^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\alpha_n = \lim_{m\to\infty} a_n^{(m)}$.
2. Montrer que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.
3. Montrer que la suite $\{(a_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}}\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. En déduire que E est complet.

Exercice 13. On considère l'espace vectoriel normé $E = (\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\ \|_1)$.

1. Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:
$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ n(x - \frac{1}{2}) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$
Vérifier que $f_n \in E$. Tracer les courbes de f_n et f_m sur le même dessin, pour $n \leq m$, et répresenter $\|f_n - f_m\|_1$ comme l'aire d'une figure géometrique du plan. La calculer géométriquement et en déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E.
2. Montrer que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction f dans E alors $f = 0$ sur $[0, \frac{1}{2}]$ et $f = 1$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$.
En déduire que l'espace E n'est pas complet.

Exercice 14. Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $f : X \to X$ une application. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < \alpha < 1$ tels que

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y) \qquad \forall x, y \in X.$$

Montrer qu'il existe un unique $x \in X$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 15. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Soit $K \in \mathcal{C}([a;b]^2, \mathbb{R})$ tel que $\sup\{|K(s,t)|; (s,t) \in [a;b]^2\} < \frac{1}{b-a}$.
Soit $X = \mathcal{C}([a;b], \mathbb{R})$ muni de la norme $\| \ \|_\infty$. Pour $x \in X$, considérons l'équation

$$(E_x) \qquad \forall t \in [a;b],\ y(t) = x(t) + \int_a^b K(t,s) y(s) ds$$

d'inconnue $y \in X$.

1. Montrer que pour tout $x \in X$, (E_x) admet une unique solution y. On la notera $y(x)$.
2. Montrer que la solution de (E_x) varie continuement en fonction de x. Pour cela, montrer que l'application $(X \to X, x \mapsto y(x))$ est lipschitzienne.

Exercice 16. Soit n un entier positif. On se donne $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) \quad \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^+,\ y^{(n)}(t) + a_1(t) y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t) y'(t) + a_n(t) y(t) = b(t) \\ \text{et} \\ \forall k \in \{0, \ldots, n-1\},\ y^{(k)}(0) = \lambda_k \end{cases}$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
Montrer que (E) admet une unique solution.
<u>Indications</u>. On pourra considérer cette équation sur $[0;T]$ avec $T > 0$. On pourra aussi montrer que (E) équivaut à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 d'inconnue vectorielle.