PROGRAMME TRAITÉ EN COURS DE TOPOLOGIE GÉNÉRALE

Toutes les informations sur le cours de *Topologie Générale* du semestre d'automne 2012 ainsi que les notes de cours sont accessibles sur le site de la licence de mathématiques :
http://licence-math.univ-lyon1/doku.php

Programme traité lors du cours du 10 septembre

1. Espaces topologiques : Notion d'espace topologique. Voisinages d'un point. Espaces séparés. Premiers exemples (topologies grossières et discrète). Topologie de la droite numérique, description des ouverts de la droite. Limite d'une suite dans un espace topologique, fonction continue entre deux espaces topologiques, traduction de ces définitions dans le cas de $\mathbb{R}$.
2. Espaces métriques : Distance. Notion d'espace métrique. Premiers exemples (droite numérique, espaces numériques).
3. Espaces normés : Norme sur un espace vectoriel réel. Une norme sur un espace vectoriel induit canoniquement une distance sur toute partie de cet espace vectoriel. Normes euclidienne, du sup et en moyenne d'ordre 1 sur les espaces vectoriels de dimension finie. Norme uniforme, normes L^1 et L^2 sur l'espace des fonctions réelles continues sur un segment fermé et borné (démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la norme L^2).

Programme traité lors du cours du 17 septembre

1. Topologie d'un espace métrique : boules ouvertes, topologie associée à un espace métrique. Traduction de la limite d'une suite dans un espace métrique. Traduction de la continuité en un point d'une fonction entre espaces métriques. Utilisation des suites pour traduire cette continuité. Normes équivalentes. Toutes les normes sont équivalentes sur un espace de dimension finie. Exemple de normes non équivalentes sur l'espace de toutes les fonctions réelles continues sur un segment fermé et borné.
2. Parties d'un espace topologique : Parties fermées. Propriétés. Exemples de fermés de $\mathbb{R}$. Les boules « fermées » d'un espace métrique sont des fermés. Intérieur, adhérence et frontière d'une partie, exemples. Parties partout denses. Complémentaire de l'intérieur et adhérence du complémentaire. Caractérisation des points de l'adhérence d'une partie.

Programme traité lors du cours du 24 septembre

Parties d'un espace topologique (fin) : Caractérisation des points de l'adhérence d'une partie. Cas des espaces métriques. Parties partout denses. Cas des espaces métriques. Exemples. Espaces séparables, exemples.
Continuité : Une fonction est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert est ouverte. Une application linéaire entre deux espaces normés est continue si et seulement si elle est lipschitzienne. Comparaison des topologies sur un ensemble. Utilisation des suites pour comparer deux topologies dans un espace métrique.
Distances équivalentes : Équivalence de deux distances. Deux distances quasi isométriques sont équivalentes. Les distance d et δ=d/1+d sont équivalentes, mais pas toujours quasi isométriques. Sur un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (j'ai admis l'existence d'un minimum pour une fonction continue sur un fermé borné).

Programme traité lors du cours du 1 octobre

Homéomorphismes : Définition. Espaces topologiques homéomorphes. Exemples et contre-exemples. Une fonction continue et bijective n'a pas nécessairement une réciproque continue.
Topologie induite : Définition. Caractérisation des voisinages d'un point dans la topologie induite. Condition pour qu'une partie fermée pour la topologie induite soit fermée dans l'espace entier.
Produits d'espaces topologiques : Topologie sur un produit de deux espaces topologiques. Continuité des fonctions à valeurs dans un espace produit. Limite d'une fonction en un point. Limite d'une fonction à valeurs dans un espace topologique. Topologie sur un produit infini d'espaces topologiques. Continuité des fonctions à valeurs dans un produit infini. Exemple d'espace topologique non métrisable.

Programme traité lors du cours du 8 octobre

Métrisabilité (fin) : Démonstration du fait que la topologie produit sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'est pas métrisable.
Espaces métriques complets : Suites de Cauchy, exemples et contre exemples. Espaces complets, espaces de Banach, espaces de Hilbert. La droite numérique est un espace complet. Les espaces normés de dimension finie sont complets. Exemples d'espaces non complets. Parties fermées dans les espaces complets, parties complètes dans un espace métrique.

Programme traité lors du cours du 15 octobre

Espaces métriques complets (suite) : **Produits d'espaces complets. Séries dans les espaces de Banach. Exemples d'espaces de Banach : espace des fonctions bornées sur un ensemble et à valeurs dans un espace de Banach (avec la norme uniforme), espace des suites bornées de réels, espace des fonctions continues sur un segment fermé borné, à valeurs dans un espace de Banach (avec la norme uniforme). Norme d'une application linéaire continue. Propriétés de la norme. Espace des applications linéaires continues d'un espace normé *E* dans un espace normé *F*. Cet espace est complet lorsque *F* est un espace de Banach. Algèbre de Banach des endomorphismes continus d'un espace de Banach. L'ensemble des éléments inversibles est ouvert, et le passage d'un endomorphisme inversible *T* à son inverse est une opération continue.**

Programme traité lors du cours du 22 octobre

Espaces métriques complets (suite) : **Théorème du point fixe. Résolution du problème de Cauchy pour une équation différentielle ordinaire. Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients continus dont la valeur ainsi que la valeur de la dérivée en un point sont données.**
Bases orthonormales dans un espace de Hilbert. L'espace l^2 des suites réelles de carré sommable est un espace de Hilbert séparable muni d'une base orthonormale canonique. Tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie est isomorphe à l^2 : a) projection sur un sous-espace fermé ; b) existence d'une suite croissante de sous-espaces de dimensions finies dont la réunion est partout dense (à suivre).

Programme traité lors du cours du 14 novembre

Espaces de Hilbert (fin) : **Caractérisation de la projection sur un sous-espace fermé. Propriétés de cette projection. Décomposition d'un vecteur dans une base orthonormale. Procédé d'orthonormalisation de Schmidt. Tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie est isomorphe à $l^2(N)$. Application à la décomposition des fonctions de** $L^2([-\pi,\pi])$ **dans la base des *sinnx* et *cosnx.* Théorème de l'énergie.**
Espaces compacts : **Définition d'un espace compact. Exemples d'espaces non compacts. Un espace métrique compact est borné.**

Programme traité lors du cours du 22 novembre

Espaces compacts (suite) : Un segment fermé et borné de *R* est compact. Les parties fermées d'un espace compact sont compactes, toute partie compacte d'un espace topologique est fermée. Un produit d'espaces compacts est compact. Théorème de Borel-Lebesgue. L'image continue d'un compact est compacte. Toute fonction réelle continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes. Un espace métrique est compact si et seulement si on peut extraire de toute suite une sous-suite convergente. Nombre de Lebesgue d'un recouvrement. Tout espace métrique compact est complet.

Programme traité lors du cours du 26 novembre

Espaces compacts (fin) : Un espace métrique est compact si et seulement s'il est complet et précompact. Une partie d'un espace complet est relativement compacte si et seulement si, pour tout *r>0,* elle peut être recouverte par un nombre fini de boules de rayon *r*.
La boule unité de *C([0,1],R)* pour la norme uniforme n'est pas compacte. Les compacts de *C([0,1],R)* sont d'intérieur vide. Partie équicontinue de $C(X,R^n)$, où *X* est un espace métrique compact. Théorème d'Ascoli. Exemple de partie compacte de $C(X,R^n)$.

PRÉVU POUR LE PROCHAIN COURS
Espaces connexes: Définition. Théorèmes de stabilité. Parties connexes de *R*. Connexité par arcs. Composantes connexes.