## Topologie Générale (Licence L3)

# Contrôle continu partiel du 3 décembre 2012

La durée de l'épreuve est de 1h30. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra ; un barème sur 24 points figure à titre indicatif. On attachera du prix à la présentation et à la rédaction des solutions.

### EXERCICE 1 (sur 16 points)

Pour tout vecteur $X \in \mathbb{C}^n$ de coordonnées $x_1,\ldots,x_n$, on pose $\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$. On munit l'algèbre $M_n(\mathbb{C})$ des matrices $n\times n$ à coefficients complexes de la norme $\|A\| = Sup_{\|X\|\leq 1}\|AX\|$.

**Question 1** (1 point). Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que, si la série $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ est convergente, alors $A^k \to 0$ quand $k \to +\infty$.

**Question 2** (5 points). Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et supposons que $A^k \to 0$ quand $k \to +\infty$.

a) Montrer que les valeurs propres de $A$ sont toutes de module strictement inférieur à $1$. En déduire que $I - A$ est inversible.

b) Déduire de a) que la série $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ est convergente et que l'on a :

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k .$$

c) Donner un exemple de suite $(A_k)_k$ de matrices complexes $n\times n$ telle que $A_k \to 0$ quand $k \to +\infty$ et telle que la série $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ ne soit pas convergente.

**Question 3** (3 points). On note $D_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui sont diagonalisables. Montrer que $D_n(\mathbb{C})$ est partout dense dans $M_n(\mathbb{C})$ (*Indication :* pour approcher $A \in M_n(\mathbb{C})$ par une suite de matrices diagonalisables, on pourra trigonaliser $A$ et utiliser le fait qu'une matrice complexe dont toutes les valeurs propres sont deux à deux distinctes est diagonalisable).

**Question 4** (2 points). Déduire de ce qui précède que le groupe $GL_n(\mathbb{C})$ des matrices complexes $n\times n$ inversibles est partout dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

**Question 5** (5 points). On note $P_A(z) = det(A - zI) = \sum_{i=0}^{n} c_i(A) z^i$ le polynôme caractéristique de la matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que les fonctions $A \to c_i(A)$ sont continues. En déduire que l'application $(A,B) \to P_A(B) = \sum_{i=0}^{n} c_i(A)B^i$ est continue de $M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C})$ dans $M_n(\mathbb{C})$.

b) Montrer que, si $A \in D_n(\mathbb{C})$, on a $P_A(z) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - z)$ où $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ désignent les $n$ valeurs propres de $A$ (répétées selon leur multiplicité). En déduire que $P_A(A) = 0$.

c) Déduire de ce qui précède et de la question 3 que l'on a $P_A(A) = 0$ pour toute $A \in M_n(\mathbb{C})$ (Cayley Hamilton).

**EXERCICE 2** (sur 8 points)

Soient $H$ un espace de Hilbert et $A$ une partie bornée non vide de $H$. On note $B(x,r) = \left\{ y \in H \,\middle|\, \|x - y\| \le r \right\}$ la boule fermée de centre $x$ et de rayon $r$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une et une seule boule fermée de $H$ qui contienne $A$ et dont le rayon soit minimal.

**Question 1** (2 points). Montrer que, si $B(x,r)$ et $B(x',r)$ sont deux boules fermées contenant $A$, alors la boule fermée $B(\frac{x+x'}{2},\rho)$, où $\rho = \sqrt{r^2 - \frac{\|x-x'\|^2}{4}}$, contient $A$.

**Question 2** (4 points). Soit $\alpha \ge 0$ la borne inférieure des rayons des boules fermées contenant $A$.

a) Montrer l'existence d'une suite de boules fermées $B(x_n,r_n)$ ($n = 1,2,\ldots$) contenant $A$ telle que $r_n \to \alpha$ quand $n \to +\infty$.

b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\ge 1}$ converge vers un point $x \in H$ (*Indication :* on pourra utiliser la question 1 pour montrer que la suite $(x_n)_{n\ge 1}$ est de Cauchy).

c) Montrer que la boule fermée $B(x,\alpha)$ contient $A$.

**Question 3** (2 points). Montrer que $B(x,\alpha)$ est l'unique boule fermée de $H$ de rayon $\alpha$ qui contient $A$ (*Indication* : utiliser la question 1).

—