CORRIGÉ DE L'EXAMEN DE TOPOLOGIE GÉNÉRALE du 18 janvier 2013

EXERCICE 1

QUESTION 1. $\|f\|_\rho$ est clairement une norme sur $E = C([0,1],\mathbb{R})$, qui vérifie $e^{-\rho}\|f\| \leq \|f\|_\rho \leq \|f\|$ puisque $|f(x)|e^{-\rho} \leq |f(x)|e^{-\rho x} \leq |f(x)|$ pour tout $x \in [0,1]$. Les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\rho$ sont donc équivalentes et, puisque E est complet pour la norme $\|\cdot\|$, il est aussi complet pour la norme $\|\cdot\|_\rho$. ∎

QUESTION 2. Soit $f \in E$. Comme $t \mapsto f(t^2)$ est continue, $x \mapsto \int_0^x f(t^2)dt$ est continue et $\Phi(f) \in E$. On a, pour $f, g \in E$:

$$|\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x)|e^{-\rho x} = \left|\int_0^x [f(t^2)-g(t^2)]dt\right| e^{-\rho x}$$

$$\leq \int_0^x [|f(t^2)-g(t^2)|e^{-\rho t^2}]e^{-\rho(x-t^2)}dt \leq \|f-g\|_\rho \int_0^x e^{-\rho(x-t)}dt$$

$$= \|f-g\|_\rho\, e^{-\rho x}\left(\frac{e^{\rho x}-1}{\rho}\right) = \|f-g\|_\rho \frac{1-e^{-\rho x}}{\rho} \leq \frac{\|f-g\|_\rho}{\rho}$$ ∎

QUESTION 3. Choisissons $\rho > 1$; alors $\Phi : (E, \|\cdot\|_\rho) \to (E, \|\cdot\|_\rho)$ est strictement contractante et, comme $(E, \|\cdot\|_\rho)$ est un espace de Banach, il existe une unique $f \in E$ telle que $\Phi(f) = f$ en vertu du théorème du point fixe de Banach. Comme

$$f(x) = y_0 + \int_0^x f(t^2)dt, \text{ on a } f(0) = y_0 \text{ et}$$

$$f'(x) = f(x^2),$$ de sorte que $y = f(x)$ est solution de (1).

Inversement, si $y = f(x)$ est solution de (1), $y(x) = y(0) + \int_0^x y'(t)dt$ $= y_0 + \int_0^x y(t^2)dt$, et $y(x) = f(x)$ vérifie $\Phi(f) = f$, donc est unique. ∎

QUESTION 4. Si $y = f(x)$ est solution de (1) et si $f'(a) = 0$ pour $0 < a < 1$, alors $f(a^2) = 0$. D'après le théorème des accroissements finis, on a $f(a^2) - f(0) = a^2 f'(\theta a^2)$ où $0 < \theta < 1$ et, comme $f(a^2) - f(0) = -y_0 < 0$, on a $f'(\theta a^2) < 0$. Mais $f'(0) = y_0 > 0$ et, comme f' est continue, il existe α $(0 < \alpha < \theta a^2 < a)$ tel que $f'(\alpha) = 0$.
Si f' s'annule en un point $x \in [0,1[$, l'ensemble

$$A = \{x \in [0,1] \mid f'(x) = 0\}$$

est un fermé non vide, de borne inférieure $a \in]0,1[$. Comme A est fermé, $a \in A$ et il existe, en vertu de ce qui précède, $\alpha \in A$ tel que $\alpha < a$, ce qui contredit le fait que $\alpha = \inf A$. Donc f' ne s'annule pas sur $[0,1[$ et, comme $f'(0) = f(0) = y_0 > 0$, f' est ≥ 0 sur $[0,1]$ et par conséquent f est croissante sur $[0,1]$. ∎

QUESTION 5. On a : $f'(x) = f(x^2) \leq f(x)$ en vertu de la question 4, puisque $x \leq x^2$. La fonction $g(x) = f(x)e^{-x}$ vérifie alors :

$$g'(x) = (f'(x) - f(x))e^{-x} \leq 0$$; elle est donc décroissante

et vérifie $g(x) \leq g(0) = y_0$, d'où $f(x) \leq y_0 e^x$. Mais $y_0 = f(0) \leq f(x)$, d'où le résultat. ∎

EXERCICE 2

QUESTION 1. On a $\|f(x)-f(y)\| \leq \|x-y\|$ quels que soient $x, y \in F$, et donc f est uniformément continue. ∎

QUESTION 2. Comme $x \longmapsto \|f(x)-x\|$ est continue et que F est compact, il existe $x_0 \in F$ tel que $\|f(x_0)-x_0\| = \inf\{\|f(x)-x\|, x \in F\}$. Si $f(x_0) \neq x_0$, alors $\|f(f(x_0))-f(x_0)\| < \|f(x_0)-x_0\| \leq \|f(f(x_0))-f(x_0)\|$, ce qui est absurde. Donc $f(x_0) = x_0$ et f possède un point fixe. Si $x_1 \neq x_0$ est un autre point fixe, on a :

$$\|f(x_1)-f(x_0)\| < \|x_1-x_0\|, \text{ d'où } \|x_1-x_0\| < \|x_1-x_0\|,$$

ce qui est absurde. Donc x_0 est le seul point fixe de f. ∎

QUESTION 3. Soient $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq x^2+y^2 \leq 1\}$ et $f : F \to F$ la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Alors F est fermé et $\|f(x,y) - f(x',y')\| = \|(x,y)-(x',y')\|$, mais f n'a pas de point fixe. ∎

QUESTION 4. Comme $f(F) = F$, il existe $x_1 \in F$ tel que $f(x_1) = x$. Puis il existe $x_2 \in F$ tel que $f(x_2) = x_1$ d'où, par récurrence, l'existence d'une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ telle que $x_0 = x$ et $f(x_{n+1}) = x_n$ pour tout $n \geq 0$. On procède de même pour construire $(y_n)_{n\geq 0}$ à partir de y. On a :

$$\|x_n - y_n\| = \|f(x_{n+1}) - f(y_{n+1})\| \leq \|x_{n+1} - y_{n+1}\| \leq \|x_{n+2} - y_{n+2}\| \leq \cdots$$
$$\leq \|x_{n+k} - y_{n+k}\|.$$

On montre de la même manière que $\|x_n - x_m\| \leq \|x_{n+k} - x_{m+k}\|$ et que $\|y_n - y_m\| \leq \|y_{n+k} - y_{m+k}\|$. ∎

QUESTION 5. Comme $F \times F$ est métrique compact, il existe une suite $(n_k)_k$ d'entiers strictement croissante telle que $x_{n_k} \to a \in F$ et $y_{n_k} \to b \in F$. Les suites $(x_{n_k})_k$ et $(y_{n_k})_k$ sont donc de Cauchy. Il existe alors $l \geq 0$ tel que : $k, j \geq l \Rightarrow \|x_{n_k} - x_{n_j}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $\|y_{n_k} - y_{n_j}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. D'après la question 4, on a pour $k > j$:

$$\|x - x_{n_k - n_j}\| = \|x_0 - x_{n_k - n_j}\| \leq \|x_{n_j} - x_{n_k}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et, de même}$$
$$\|y - y_{n_k - n_j}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$ ∎

QUESTION 6. Posons $p = n_k - n_j \geq 1$ où n_k et n_j sont choisis comme dans la question 5. On a :

$$\|x_1 - y_1\| \leq \|x_p - y_p\| \leq \|x_p - x\| + \|x-y\| + \|y - y_p\| \leq \|x-y\| + \varepsilon$$

et $\|f(x_1) - f(y_1)\| \geq \|x_1 - y_1\| - \varepsilon$. En faisant tendre ε vers 0, on obtient $\|f(x_1)-f(y_1)\| \geq \|x_1 - y_1\|$. Or $x \neq y \Rightarrow x_1 \neq y_1$ et donc $\|f(x_1)-f(y_1)\| < \|x_1-y_1\|$, d'où $\|x_1-y_1\| < \|x_1-y_1\|$, ce qui est absurde. Donc $f : F \to F$ ne peut pas être surjective. ∎