Université Claude Bernard Mathématiques
L3 Calcul intégral

Feuille d'exercices numéro 8
Mesures produits

Exercice 1 On désigne par λ (respectivement μ) la mesure de Lebesgue (respectivement la mesure de comptage) sur $([0,1], \mathscr{B}_{[0,1]})$. Soit $\Delta = \{(x,x); x \in [0,1]\}$. Est-ce que Δ est un borélien de $\mathbf{R}^2$? Justifier ensuite l'existence des intégrales itérées suivantes, et les comparer :

$$I_1 = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \mathbf{1}_\Delta(x,y) d\lambda(x) \right) d\mu(y)$$

$$I_2 = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \mathbf{1}_\Delta(x,y) d\mu(y) \right) d\lambda(x)$$

Quelle conclusion peut-on tirer de cet exercice ?

Exercice 2 Pour $x \in \mathbf{R}$ et $y > 0$, on pose $f(x,y) = y^x$. Soient a et b tels que $-1 < a < b$. Montrer que f est λ_2-intégrable sur $[a,b] \times [0,1]$. En déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln(y)} dy.$$

Exercice 3 Pour $y > 0$, on pose $f_y(x,t) = \dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)}$.

1. Montrer que f_y est λ_2-intégrable sur $[0,1] \times \mathbf{R}^+$.
2. Soit $g(y,t) = \int_0^1 f_y(x,t)dx$. Justifier que g est λ_2-intégrable sur $[0,1] \times \mathbf{R}^+$.
3. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t} \right)^2 dt$.

Exercice 4

1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx$ est bien définie et que $I = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx$.
2. Calculer de deux façons différentes l'intégrale

$$\int_{\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+} \frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)}.$$

   En déduire que $I = \pi^2/4$.
3. Déduire des questions précédentes et d'un développement en série entière de $\dfrac{1}{1-x^2}$ que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \text{ puis que } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

Exercice 5 Soit μ une mesure sur $\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R})$ telle que $\mu(\mathbf{R}) = 1$. Pour $t \in \mathbf{R}$, on pose

$$F_\mu(t) = \mu(]-\infty, t[); G_\mu(t) = \mu(]t, +\infty[); H_\mu(t) = \mu(\{t\}).$$

1. Montrer que les fonctions F_μ, G_μ et H_μ sont boréliennes.

2a. Soit ν une autre mesure sur $\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R})$ telle que $\nu(\mathbf{R}) = 1$. Montrer que $\int_\mathbf{R} F_\mu d\nu = \int_\mathbf{R} G_\nu d\mu$.

2b. Soit $D_\mu = \{t \in \mathbf{R} \text{ t.q. } H_\mu(t) \neq 0\}$ et $D_\nu = \{t \in \mathbf{R} \text{ t.q. } H_\nu(t) \neq 0\}$. Justifier que les ensembles D_μ et D_ν sont au plus dénombrables et montrer l'égalité suivante

$$\int_{\mathbf{R}} F_\mu d\nu + \int_{\mathbf{R}} F_\nu d\mu + \sum_{t \in D_\mu \cap D_\nu} \mu(\{t\})\nu(\{t\}) = 1.$$

Exercice 6 Soit μ une mesure sur $\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R})$ telle que $\mu(\mathbf{R}) = 1$. Pour $s > 0$ et $x \in \mathbf{R}$, on pose :

$$H_s^\mu(x) = H_s(x) = \int_{\mathbf{R}} \frac{s}{s^2 + (x-t)^2} d\mu(t).$$

Le but de cet exercice est de montrer que $H_s^\mu = H_s^\nu \Longrightarrow \mu = \nu$.

1. Montrer que H_s est continue sur $\mathbf{R}$ et déterminer la limite de $H_s(x)$ quand x tend vers $\pm\infty$.
2. Soit $a \in \mathbf{R}$. Déterminer $\lim\limits_{s \to 0^+} sH_s(a)$.
3. Soient $a < b$ deux réels. Déterminer $\lim\limits_{s \to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_a^b H_s(x)dx$.
4. Soient μ et ν deux mesures sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$ telles que $\mu(\mathbf{R}) = \nu(\mathbf{R}) = 1$. On suppose que $H_s^\mu = H_s^\nu$ pour tout $s > 0$. Montrer que $\mu = \nu$.

Exercice 7 Pour $(x, y) \in [-1, 1]^2$, on pose

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que les intégrales itérées de f existent et sont égales
2. La fonction f est-elle λ_2-intégrable sur $[-1, 1]^2$?

Exercice 8 Pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on pose

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \text{ et } x < y < 2x \\ -\frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \text{ et } 2x < y < 3x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Montrer que $f \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ est borélienne.
2. Prouver que pour tout $y \in \mathbf{R}$, $f(., y)$ est Lebesgue-intégrable ; pour tout y on définit $\varphi(y) = \int_{\mathbf{R}} f(x, y)dx$. Montrer que φ est Lebesgue-intégrable et calculer $\int_{\mathbf{R}} \varphi(y)dy$.
3. Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x, .)$ est Lebesgue-intégrable ; pour tout x on définit $\psi(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x, y)dy$. Montrer que ψ est Lebesgue-intégrable et calculer $\int_{\mathbf{R}} \psi(x)dx$.
4. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 9 (**Examen juin 2007**)

Pour x réel, soit $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\left(\frac{x}{u}\right)^2 - u^2\right] du = 2\int_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{x}{u}\right)^2 - u^2\right] du.$

(a) Montrer que la fonction F ainsi définie est continue et bornée sur $\mathbf{R}$.

(b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}^*$, et exprimer $F'(x)$ en fonction de $F(x)$ pour $x > 0$.

(c) En déduire la valeur de $F(x)$ en fonction de $F(0)$ pour x réel.

(d) Ecrire $F(0)^2$ comme une intégrale sur $\mathbf{R}^2$ et en déduire la valeur de $F(0)$ (on pourra penser aux coordonnées polaires).

Exercice 10

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin x/x$ n'est pas λ-intégrable sur $\mathbf{R}^+$. On peut néanmoins définir l'intégrale comme suit, à condition que la limite existe

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \overset{def}{=} \lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx.$$

2. Soit la fonction $f : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = \exp(-xy)\sin(x)$. La fonction f est-elle λ_2-intégrable sur $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$?
3. Montrer que f est λ_2-intégrable sur $[0, A] \times \mathbf{R}^+$ pour tout nombre $A > 0$.
4. En déduire la valeur de I.

Exercice 11 Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_\mathbf{R})$ telle que $\mu(\mathbf{R}) = 1$. Pour x réel, on pose

$$\phi(x) = \int_\mathbf{R} \exp(ixt) d\mu(t).$$

1. Montrer que la fonction ϕ est continue et bornée sur $\mathbf{R}$.
2. Soit $n \geqslant 1$ et $a \in \mathbf{R}$. Montrer que

$$\frac{1}{2n} \int_{-n}^n \exp(-iax)\phi(x)dx = \int_\mathbf{R} K_n(t-a)d\mu(t)$$

   où K_n est une fonction que l'on explicitera.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n} \displaystyle\int_{-n}^n \exp(-iax)\phi(x)dx$.
4. En déduire que si ϕ est λ-intégrable sur $\mathbf{R}$, alors μ est une mesure diffuse.

Exercice 12

En calculant de deux façons

$$I = \int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=0}^1 e^{-x} \sin(2xy) dy dx,$$

déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin^2 x}{x} dx$.

Exercice 13 Dans cet exercice, $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, et $f \colon E \to \mathbf{R}^+$ une fonction mesurable.

1. Montrer que $A = \{(x,t) \in E \times \mathbf{R}^+ \colon f(x) \geq t\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^+)$.
2. En utilisant le théorème de Tonelli, prouver que

$$\int_E f d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{x \in E \colon f(x) \geq t\})dt$$

3. Soit maintenant $\varphi \colon \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ nulle en 0. En vous inspirant de la question précédente, et en utilisant le fait que $\varphi(x) = \int_0^x \varphi'(t)dt$, montrer que

$$\int_E \varphi \circ f d\mu = \int_0^{+\infty} \varphi'(t)\mu(\{x \in E \colon f(x) \geq t\})dt$$