

Feuille d'exercices numéro 6
Convergence dominée.

On note λ la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R} .

Exercice 1 (Examen Juin 2008 session 2) Calculer la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n \sin(x/n)}{x^3} dx.$$

Indication : Comment majorer $\sin u$ quand u proche de 0 ?

Exercice 2 Soit (X, \mathcal{F}, μ) un espace mesuré et $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction μ -intégrable.

1) Pour $n \geq 0$, soit $A_n = \{x \in X \text{ t.q. } |f(x)| \geq n\}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{A_n} f d\mu$.

2) On suppose de plus que f est à valeurs strictement positives. On fixe $A \in \mathcal{F}, \mu(A) < +\infty$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f^{1/n} d\mu$.

Exercice 3 Soit $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose de plus que f est λ -intégrable. Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \exp(-n \sin^2 x) f(x) dx.$$

Exercice 4 Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B}_{\mathbf{R}})$ telle que $\mu(\mathbf{R}) = 1$ et $\int_{\mathbf{R}} \exp(a|t|) d\mu(t) < +\infty, \forall a \geq 0$.

a) Montrer que $t \mapsto t^n$ est μ -intégrable pour tout entier positif n .

b) Soit $z \in \mathbf{C}$. Montrer que $t \mapsto \exp(zt)$ est μ -intégrable.

c) On pose $F(z) = \int_{\mathbf{R}} \exp(zt) d\mu(t)$. Montrer que F a un développement en série entière de la forme

$$F(z) = \sum_{n \in \mathbf{N}} a_n z^n,$$

où l'on explicitera les coefficients (a_n) .

Exercice 5 Soit (X, \mathcal{F}, μ) un espace mesuré; on suppose que la mesure μ est finie. Soit $f : X \rightarrow \mathbf{R}^+$ une fonction \mathcal{F} -mesurable et, pour $n \geq 1, I_n = \int_X \frac{f^n}{1+f^n} d\mu$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 6 Dans cet exercice, X désigne un intervalle de \mathbf{R} , muni de sa tribu borélienne.

1. On suppose $X =]0, 1[$; soit $0 < \alpha < +\infty$. A quelle condition la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est-elle intégrable sur X ?
2. Même question avec $X = [1, +\infty[$ et $X =]0, +\infty[$.
3. Dans la suite de l'exercice, on suppose $X =]0, +\infty[$, et on considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$. Montrer que f n'est pas intégrable sur X .
4. On introduit $f_n = f \cdot \mathbf{1}_{]0, n]}$; montrer que (f_n) converge uniformément vers f , que chaque f_n est intégrable sur X , et que $\int_X f_n d\lambda$ a une limite quand n tend vers $+\infty$.
5. Conclusion ?

Exercice 7 Montrer que les fonctions suivantes sont λ -intégrables sur I et déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n d\lambda$

a) $I = [0, 1]$ et $f_n(x) = \frac{nx \sin x}{1 + (nx)^\alpha}$ où $1 < \alpha < 2$.

b) $I = [A, +\infty[$ où $A > 0$ et $f_n(x) = \frac{n^2 x \exp(-n^2 x^2)}{1 + x^2}$.

c) $I = [0, 1]$ et $f_n(x) = \sqrt{n} \mathbf{1}_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]}(x)$.

Exercice 8 On pose $f_n(x) = n(1-x)^n \sin^2(nx) \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.

- Déterminer la limite simple (notée f) de la suite (f_n) .
- Justifier que, $\forall u \geq 0, 1 - u \leq \exp(-u)$.
- En déduire que la suite $(\int_{\mathbf{R}} f_n(x) dx)_n$ converge et que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx \neq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Exercice 9 Soit (X, \mathcal{F}, μ) un espace mesuré et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante de fonctions μ -intégrables convergente vers 0 μ -pp. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_X f_n d\mu = \int_X \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f_n \right) d\mu.$$

On pourra utiliser les résultats du cours de L2 sur les séries alternées.

Exercice 10 (Examen juin 2007) On considère pour $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$, les fonctions $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ définies par

$$f_n(x) = \frac{1}{x^{1/n} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}.$$

- Montrer que pour tout $n \geq 2$, f_n est Lebesgue-intégrable sur $]0, +\infty[$.
- Démontrer que pour $n \geq 2$ et $x \geq 1$, on a $f_n(x) \leq \frac{4}{x^2}$.
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.

Exercice 11 Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x , on pose $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

- Montrer que $\sum f_n(x)$ est une série convergente pour tout $x > 0$ et calculer sa somme $f(x)$.
- Comparer $\int_{\mathbf{R}^+} f(x) dx$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^+} f_n(x) dx$. Expliquer.

Exercice 12 On munit l'espace $[0, 1]$ de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

- Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur \mathbf{R}_+ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leq x < 1/n \\ -n^2(x - 2/n) & \text{si } 1/n < x \leq 2/n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $\liminf \int f_n d\lambda, \int \liminf f_n d\lambda, \limsup \int f_n d\lambda$ et $\int \limsup f_n d\lambda$.

- Même question avec la suite de fonctions (g_n) définie par $g_{2p} = \mathbf{1}_{[0, 1/(2p)]}, g_{2p+1} = \mathbf{1}_{[1/(2p+1), 1]}$.

Exercice 13

- Montrer que la fonction $f: x \mapsto \frac{\sin(x)}{e^x - 1}$ est Lebesgue-intégrable sur $[0, +\infty[$.
- Montrer que pour tout $x > 0$ on peut écrire $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin(x)$. Est-ce vrai pour $x = 0$?
- En déduite que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$.

Exercice 14 (*) Pour tout $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = (1 - \frac{x^2}{n})^n \mathbf{1}_{[0, \sqrt{n}]}(x)$, $g_n(x) = (1 - \frac{x^2}{n})^{1/2} f_n(x)$, $I_n = \int_0^{\infty} f_n(x) dx$ et $J_n = \int_0^{\infty} g_n(x) dx$.

1. Montrer que $I_n J_n = \frac{n}{n+1} \frac{\pi}{4}$.
2. En déduire la valeur de $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

Exercice 15 Soit μ une mesure finie sur $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$. Pour $k \in \mathbf{N}$, on pose

$$m_k = m_k(\mu) = \int_{[0,1]} t^k d\mu(t).$$

- a) Déterminer $\lim_{k \rightarrow \infty} m_k$.
- b) Pour $\gamma > 0, p \in \mathbf{N}, a \in]0, 1]$, on pose

$$J_p(\gamma, a) = \int_{[0,1]} \exp(-\gamma(t/a)^p) d\mu(t).$$

Montrer que

$$J_p(\gamma, a) = \sum_{k \in \mathbf{N}} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\gamma^k}{a^{pk}} m_{pk}.$$

- c) Déterminer $\lim_{p \rightarrow \infty} J_p(\gamma, a)$.
- d) Soient μ et ν deux mesures finies sur $[0, 1]$ vérifiant $m_k(\mu) = m_k(\nu), \forall k \in \mathbf{N}$. Déduire de ce qui précède que pour tous a, b dans $[0, 1]$ vérifiant $a < b$, on a $\mu([a, b]) = \nu([a, b])$.
- e) En déduire que $\mu = \nu$.

Exercice 16 Soit (X, \mathcal{F}, μ) un espace mesuré et $f : X \rightarrow \mathbf{R}^+$ une fonction telle que, pour tout $n \geq 1$, f^n est μ -intégrable. On pose $A = \{x \in X \text{ t.q. } f(x) \geq 1\}$, $B = \{x \in X \text{ t.q. } f(x) > 1\}$ et $J_n = \int_X f^n d\mu$

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
 - (a) La suite $(J_n)_{n \geq 1}$ est convergente.
 - (b) La suite $(J_n)_{n \geq 1}$ est majorée.
 - (c) $\mu(B) = 0$.
2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
 - (d) La série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} J_n$ est convergente.
 - (e) La suite $(J_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.
 - (f) $\mu(A) = 0$.