**Feuille d'exercices numéro 3**
Fonctions mesurables.

# Fonctions mesurables.

Sauf mention contraire, on travaille dans un espace mesurable $(X, \mathscr{T})$.

**Exercice 1 Vrai ou Faux ?**
**(1)** L'ensemble $[2,3[\cap \mathbf{Q}$ est un borélien de $\mathbf{R}$.
**(2)** Une fonction $f : (X_1, \mathscr{T}_1) \to (X_2, \mathscr{T}_2)$ qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs est étagée.
**(3)** Si $f : (X_1, \mathscr{T}_1) \to (X_2, \mathscr{T}_2)$ est mesurable et $g : (X_2, \mathscr{T}_2) \to (X_3, \mathscr{T}_3)$ est étagée, alors $gof : (X_1, \mathscr{T}_1) \to (X_3, \mathscr{T}_3)$ est étagée.
**(4)** Si $f : (X, \mathscr{T}) \to \mathbf{R}$ vérifie que pour tout fermé $F \subset \mathbf{R}$, $f^{-1}(F) \in \mathscr{T}$, alors $f$ est mesurable.
**(5)** Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est borélienne et ne s'annule pas, alors $1/f$ est borélienne.
**(6)** L'ensemble $A = \{x \in \mathbf{R} \text{ t.q. } \cos(x) = \sin(\sin x)\}$ est un borélien de $\mathbf{R}$.

**Exercice 2** Soit $A \subset X$. Montrer que la fonction $\mathbf{1}_A$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathscr{T}$.

**Exercice 3** (**Examen juin 2007 2ème session**).
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Montrer que $f$ est borélienne.

**Exercice 4** Soit $f : X \to \mathbf{R}$ mesurable et $g : X \to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = 1$ si $f(x) \in \mathbf{Q}$ et $g(x) = 0$ sinon. Montrer que $g$ est mesurable.

**Exercice 5** Soit $f : X \to \mathbf{R}$. On définit pour tout $M > 0$ la fonction $f_M$ par

$$f_M(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } |f(x)| < M \\ M \text{ si } f(x) \geqslant M \\ -M \text{ si } f(x) \leqslant -M. \end{cases}$$

Montrer l'équivalence entre (A) et (B) :
(A) $f$ est mesurable.
(B) $\forall M > 0, f_M$ est mesurable.

**Exercice 6** Décrire les fonctions mesurables de $(X, \mathscr{T})$ dans $\mathbf{R}$ dans les cas suivants :
(1) $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$.
(2) $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$.

**Exercice 7** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Montrer que la dérivée $f'$ est borélienne.

**Exercice 8** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction monotone. Montrer que $f$ est borélienne.

**Exercice 9** Soit $(f_n)$ une suite de fonctions mesurables de $X$ dans $\mathbf{R}$.
(a) Soit $A = \{x \in X \text{ t.q. la suite } (f_n(x))_{n\in\mathbf{N}} \text{ converge}\}$ et $B = \{x \in X \text{ t.q. la suite } (f_n(x))_{n\in\mathbf{N}} \text{ est bornée}\}$. Montrer que $A$ et $B$ sont dans $\mathscr{T}$.
(b) Soit $a \in \mathbf{R}$. On définit $g : X \to \mathbf{R}$ par $g(x) = \inf\{n \in \mathbf{N} \text{ t.q. } f_n(x) \geqslant a\}$, avec la convention $\inf \emptyset = 0$. Montrer que $g$ est mesurable.

**Exercice 10** On note $\mathcal{L}^0(X, \mathscr{T})$ l'ensemble des fonctions mesurables de $X$ dans $\mathbf{R}$.
(a) Montrer que toute fonction constante appartient à $\mathcal{L}^0(X, \mathscr{T})$.
(b) Montrer que $f \in \mathcal{L}^0(X, \mathscr{T}) \Rightarrow |f| \in \mathcal{L}^0(X, \mathscr{T})$ mais que la réciproque est fausse.

(c) Soit $X = \mathbf{R}$ et $\mathscr{T}_s$ la tribu dans $X$ engendrée par les singletons. Montrer que $f \in \mathcal{L}^0(X, \mathscr{T}_s)$ si et seulement si il existe un ensemble $D \subset \mathbf{R}$ au plus dénombrable tel que $f_{|D^c}$ soit constante.

**Exercice 11** Soit $X$ un ensemble (on ne se donne pas de tribu sur $X$). Soit $f$ une fonction de $X$ dans $\mathbf{R}$.
(a) Montrer qu'il existe sur $X$ une plus petite tribu, notée $\mathscr{T}_f$ telle que $f : (X, \mathscr{T}_f) \to \mathbf{R}$ soit mesurable.
(b) Décrire $\mathscr{T}_f$ dans le cas où $X = \mathbf{R}$ et $f(x) = x^2$.
(c) Décrire $\mathscr{T}_f$ dans le cas où $X = \mathbf{R}$ et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est la fonction "partie entière".
(d) On revient au cas général. Soit $g : X \to \mathbf{R}$ une autre fonction. Montrer que $g$ est mesurable (pour la tribu $\mathscr{T}_f$) si et seulement si il existe une fonction $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mesurable telle que $g = h \circ f$.

**Exercice 12** Soit $X$ un ensemble (on ne se donne pas de tribu sur $X$). On note $B(X)$ l'ensemble des fonctions bornées de $X$ dans $\mathbf{R}$. Si $f \in B(X)$, on pose $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. On remarquera que $B(X)$ est un espace vectoriel.

Soit $E$ un sous-espace vectoriel de $B(X)$. On dit que $E$ est régulier s'il vérifie
(i) $\mathbf{1}_X \in E$
(ii) Si $f$ et $g$ appartiennent dans $E$, alors $\max(f, g)$ appartient à $E$.
(iii) Si $(f_n)$ est une suite d'éléments de $E$ telle que $\sup_{n \in \mathbf{N}} \|f_n\| < \infty$ et qui converge simplement vers une fonction $f$, alors $f$ appartient à E.

1. Soit $\mathscr{T}$ une tribu sur $X$ et $BM(X, \mathscr{T})$ l'ensemble des fonctions de $X$ dans $\mathbf{R}$ qui sont bornées et mesurables (pour $\mathscr{T}$). Montrer que $BM(X, \mathscr{T})$ est un sous-espace vectoriel régulier de $B(X)$.
2. Réciproquement, soit $E$ un sous-espace vectoriel régulier de $B(X)$. On va construire une tribu $\mathscr{T}$ dans $X$ telle que $E = BM(X, \mathscr{T})$.
   (a) Soit $\mathscr{T} = \{A \in \mathscr{P}(X) \text{ t.q. } \mathbf{1}_A \in E\}$. Montrer que $\mathscr{T}$ est une tribu dans $X$.
   (b) Montrer que $BM(X, \mathscr{T}) \subset E$.
   (c) On fixe $f \in E$ et $\alpha \in \mathbf{R}$. On pose $A = \{x \in X \text{ t.q. } f(x) \leqslant \alpha\}$ et $g = \max(f, \alpha) - \alpha$. Montrer que $g(x) = 0 \iff x \in A$. On pose ensuite pour $n \geqslant 1$, $g_n = n \inf(g, 1/n)$. Quelle est la limite simple de la suite $(g_n)$ ? En déduire que $A \in \mathscr{T}$, puis que $f \in BM(X, \mathscr{T})$. Conclure.

**Exercice 13** (Théorème d'Egoroff, **Partiel avril 2007**)

Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$ et $(f_n)$ une suite de fonctions mesurables de $X$ dans $\mathbf{R}$, convergeant simplement vers une fonction $f$.

1. La fonction $f$ est-elle nécessairement mesurable ?
2. On pose pour $k \in \mathbf{N}^*$ et $n \in \mathbf{N}$,
$$E_n^k = \bigcap_{p \geqslant n} \{x \in X \text{ t.q. } |f_p(x) - f(x)| \leqslant 1/k\}.$$
   Montrer que $E_n^k \in \mathscr{T}$. Quelle relation y a-t-il entre $E_n^k$ et $E_{n+1}^k$ ? entre $E_n^k$ et $E_n^{k+1}$ ?
3. Montrer que $\forall k \in \mathbf{N}^*, X = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} E_n^k$. En déduire que
$$\forall \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbf{N}^*, \exists n_k \in \mathbf{N} \text{ t.q. } \mu(X \setminus E_{n_k}^k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^k}.$$
4. En déduire que $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathscr{T}$ tel que $\mu(A) \leqslant \varepsilon$ et $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $X \setminus A$.