

Feuille d'exercices numéro 1
Tribus.

Exercice 1 Vrai ou Faux ?

- (1) Soit E un ensemble. Alors $A \subset E \iff A \in \mathcal{P}(E)$.
- (2) Soit (E, \mathcal{T}) un espace mesurable. Alors $E \in \mathcal{T}$.
- (3) \mathcal{T} est une tribu sur E si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :
 - $\emptyset \in \mathcal{T}$.
 - $A \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c \in \mathcal{T}$.
 - $(\forall n \in \mathbf{N}, A_n \in \mathcal{T}) \Rightarrow \bigcap A_n \in \mathcal{T}$.
- (4) Si E est dénombrable et \mathcal{T} est une tribu sur E , alors \mathcal{T} est dénombrable.
- (5) La tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ est la tribu engendrée par les fermés de \mathbf{R} .
- (6) Un borélien est soit un ouvert, soit son complémentaire (c'est-à-dire un fermé).

Exercice 2 Soit $X = \{1, 2, 3\}$. Montrer que $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$ est une tribu.

Exercice 3 Soit (X, \mathcal{T}) un espace mesurable et A, B des éléments de \mathcal{T} . Montrer que $A \cap B \in \mathcal{T}$ et $A \Delta B \in \mathcal{T}$.

Exercice 4 Les classes suivantes sont-elles des tribus ?

- (a) $\mathcal{F}_1 = \{A \in \mathcal{P}(\mathbf{R}) \text{ t.q. } A \text{ est finie}\}$.
- (b) $\mathcal{F}_2 = \{A \in \mathcal{P}(\mathbf{R}) \text{ t.q. } A \text{ est finie ou } A^c \text{ est finie}\}$.
- (c) $\mathcal{F}_3 = \{A \in \mathcal{P}(\mathbf{R}) \text{ t.q. } A \text{ est au plus dénombrable ou } A^c \text{ est au plus dénombrable}\}$.

Exercice 5 Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Déterminer la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{A})$ dans les cas suivants :

- (a) $\mathcal{A} = \{A\}$, où A est une partie fixe de X .
- (b) $\mathcal{A} = \{\{x\}, x \in X\}$. On séparera le cas où X est fini ou dénombrable et le cas où X n'est pas au plus dénombrable.
- (c) $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(X) \text{ t.q. } A_0 \subset A\}$, où A_0 est une partie fixe de X .

Exercice 6 Combien y a-t-il de tribus différentes sur un ensemble à 3 éléments ? Sur un ensemble à 4 éléments ?

Exercice 7 Montrer que si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux classes de parties de X telles que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, alors $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B})$. Montrer ensuite que $\sigma(\sigma(\mathcal{A})) = \sigma(\mathcal{A})$.

Exercice 8 Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction entre deux ensembles.

- (a) Soit \mathcal{B} une tribu sur Y . Montrer que l'ensemble $f^{-1}[\mathcal{B}] := \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$ est une tribu sur X . Montrer que si $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$ alors $f^{-1}[\mathcal{B}] = \sigma(\{f^{-1}(B), B \in \mathcal{E}\})$.
- (b) Soit \mathcal{A} une tribu sur X . Donner un exemple montrant que $\{f(A), A \in \mathcal{A}\}$ n'est pas nécessairement une tribu sur Y . Montrer qu'en revanche $\{B \in \mathcal{P}(Y) \text{ t.q. } f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur Y .

Exercice 9 Tribu engendrée par une partition. Soit $\pi = \{A_i\}_{i \in I}$ une partition de X . Déterminer $\sigma(\pi)$:

- (a) Lorsque I est au plus dénombrable.
- (b) Lorsque I n'est pas au plus dénombrable.

Exercice 10 (Partiel avril 2007) On rappelle que la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ est la tribu engendrée par la famille des intervalles ouverts $]a, b[$, $a < b$. En déduire que $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ est aussi la tribu engendrée par la famille \mathcal{C} suivante :

$$\mathcal{C} = \{]-\infty, t], t \in \mathbf{R}\}.$$

Exercice 11 La tribu borélienne de \mathbf{R} . On munit \mathbf{R} de la métrique usuelle et on note $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ la tribu borélienne de \mathbf{R} .

- (1) Montrer que tout ouvert, tout fermé et tout intervalle de \mathbf{R} sont des boréliens.
- (2) Montrer que $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ est engendrée par une classe dénombrable.

- (3) Montrer que $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ n'est pas engendrée par une partition de \mathbf{R} .
- (4) Soit $a \in \mathbf{R}$ et $\mathcal{F}_a = \{B \in \mathcal{B}_{\mathbf{R}} \text{ t.q. } B + a \in \mathcal{B}_{\mathbf{R}}\}$. Montrer que \mathcal{F}_a est une tribu. En déduire que $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbf{R}}, B + a \in \mathcal{B}_{\mathbf{R}}$. On dit que la tribu borélienne est invariante par translation.
- (5) Soit $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}^s = \{B \in \mathcal{B}_{\mathbf{R}} \text{ t.q. } B = -B\}$. Montrer que $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}^s$ est une tribu, que l'on appelle tribu des boréliens symétriques.

Exercice 12 On travaille sur l'ensemble $X = \mathbf{N}$.

- (1) Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{A}_n = \{\llbracket 0, n \rrbracket, \{n+1\}, \{n+2\}, \dots\}$ et $\mathcal{I}_n = \sigma(\mathcal{A}_n)$. Montrer que la suite (\mathcal{I}_n) est une suite décroissante. On note ensuite $\mathcal{I} = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{I}_n$. Montrer que $\mathcal{I} = \{\emptyset, \mathbf{N}\}$.
- (2) Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{A}'_n = \{\{0\}, \{1\}, \dots, \{n-1\}, \llbracket n, +\infty \rrbracket\}$ et $\mathcal{I}'_n = \sigma(\mathcal{A}'_n)$. Montrer que la suite (\mathcal{I}'_n) est croissante. Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{I}'_n$ n'est pas une tribu.

Exercice 13 (*) On travaille sur l'ensemble $X = \mathbf{N}^*$. Pour $n \geq 1$, on note $n\mathbf{N}^*$ l'ensemble des multiples non nuls de n . Soit les classes $\mathcal{A} = \{n\mathbf{N}^*, n \geq 1\}$ et $\mathcal{A}' = \{p\mathbf{N}^*, p \geq 1, p \text{ premier}\}$. Montrer que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(X)$, mais que $\sigma(\mathcal{A}') \neq \mathcal{P}(X)$.

Exercice 14 Soit X un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ une classe de parties de X . Montrer que pour chaque ensemble $C \in \sigma(\mathcal{A})$, il existe une sous-classe au plus dénombrable $\mathcal{A}_C \subset \mathcal{A}$ telle que $C \in \sigma(\mathcal{A}_C)$.

Exercice 15 Soient X et Y deux ensembles au plus dénombrables. Montrer que le produit des tribus complètes est la tribu complète du produit cartésien, c'est-à-dire que $\mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X \times Y)$.