Licence de Mathématiques L3 **Fiche de TD N° 0**
Calcul intégral

On considère dans cette fiche la notion d'intégrabilité au sens de Riemann.

Exercice 1 Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions définies sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et intégrables sur $[a,b]$

1. Si la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, alors f est intégrable sur $[a,b]$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$
2. Si la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction g, alors g est intégrable sur $[a,b]$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)dx = \int_a^b \sum_{n\geq 1} f_n(x))dx = \sum_{n\geq 1}\int_a^b f_n(x)dx.$

Exercice 2 Soit f et g deux fonctions définies sur $[0,1]$ par : $f(x)=1$ si $x=0$ et $f(x)=0$ sinon, $g(x)=1/q$ si $x=p/q$ avec p et q entiers non nuls et premiers entre eux et $g(x)=0$ sinon.

1. Montrer que f et g sont intégrables. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$
2. Montrer que $f\circ g$ n'est pas intégrable.

Exercice 3

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_0^n E(x)dx$
2. Soit $x\in[0,1]$ et, pour tout $n\geq 1$, soit $a_n=a_n(x)$ sa $n^{ième}$décimale. On note $f(x)$ le réel de $[0,1]$ dont la n^{ime} décimale b_n est définie par $b_{2n}=a_{2n-1}$ et $b_{2n-1}=a_{2n}$. Montrer que f est intégrable sur $[0,1]$ et calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$

Exercice 4 Soit $a\in\mathbb{R}$ tel que $\mid a \mid\neq 1$.
A l'aide des sommes de Riemann, calculer $\displaystyle I(a)=\int_0^\pi \ln(1-2a\cos x+a^2)dx.$

Exercice 5 Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Pour tout $n\geq 1$, on note $\displaystyle\Delta_n=\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+\frac{k}{n}(b-a))$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} n\ \Delta_n$.

Exercice 6 Calculer la limite des suites suivantes :

1. $a_n = n-\sum_{k=0}^{n-1}\cos(1/\sqrt{n+k})$, $n\geq 1$.
2. $b_n=\sum_{k=1}^{n}\sin(\frac{k}{n})\sin(\frac{k}{n^2})$, $n\geq 1$.

Exercice 7 Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction convexe et $c=(a+b)/2$.

1. Montrer que, pour tout $x\in[a,b]$, $f(c)+(x-c)f'_d(c)\leq f(x)\leq f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.
2. Montrer que $\displaystyle(b-a)f(\frac{a+b}{2})\leq\int_a^b f(x)dx\leq\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$.