PROGRAMME TRAITÉ EN COURS DE MESURE ET INTÉGRATION

THIERRY FACK

Toutes les informations sur le cours de *Mesure et Intégration* du semestre d'automne 2012 ainsi que les notes de cours de l'an dernier sont disponibles sur le site de la licence de mathématiques :

http://licence-math.univ-lyon1/doku.php

Programme traité lors du cours du 10 septembre

Primitives et intégrales

Notion de primitive (en un sens généralisé) d'une fonction. Intégrale simple. Cas des fonctions en escalier. Fonctions réglées : définition, exemples, une fonction réglée est une limite uniforme de fonctions en escalier, propriétés élémentaires des fonctions réglées. Existence de primitives pour les fonctions réglées sur un intervalle. Intégrale simple des fonctions réglées. Théorème fondamental du calcul infinitésimal pour les fonctions réglées.

Programme traité lors du cours du 17 septembre

Intégrale de Riemann

Définition d'une fonction Riemann intégrable sur un intervalle fermé et borné. Une fonction Riemann intégrable est bornée. Propriétés élémentaires de l'intégrale de Riemann (c'est une forme linéaire croissante continue, pour la norme de la convergence uniforme. Une limite uniforme de fonctions Riemann intégrables est Riemann intégrable) Exemples de fonctions Riemann intégrables : fonctions en escalier, fonctions réglées (avec coïncidence de l'intégrale de Riemann et de l'intégrale définie). Exemple de fonction non Riemann-intégrable : la fonction de Dirichlet. Critère d'intégrabilité de Riemann (sommes de Darboux, oscillation moyenne relative à une subdivision, critère d'intégrabilité de Riemann par la nullité de l'oscillation moyenne, critère de Darboux). Ensembles négligeables de la droite numérique. Les parties dénombrables sont négligeables. Critère d'intégrabilité de Lebesgue (énoncé mais pas démontré). Utilisation du critère de Lebesgue pour démontrer que si une fonction est intégrable au sens de Riemann, son module l'est aussi.

Programme traité lors du cours du 24 septembre

Intégrale de Riemann (fin)

Démonstration du critère de Riemann. Ensemble de Cantor. Exemple de fonction intégrable au sens de Riemann mais qui n'est pas réglée. Exemple de fonction continue dérivable presque partout et de dérivée nulle, mais non constante (fonction de Cantor).

Intégrale de Lebesgue

Construction de l'intégrale de Lebesgue d'une fonction mesurable bornée (en supposant l'existence du prolongement de Lebesgue). Tribu sur un ensemble. Mesure positive sur une tribu (cas général). Retour au cas de la mesure de Lebesgue sur la droite réelle : mesure extérieure d'un ensemble, ensemble mesurable. Énoncé du théorème de prolongement de Lebesgue.

Programme traité lors du cours du 1 octobre

Prolongement de Lebesgue

Mesure extérieure des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Propriétés. Un exemple d'ensemble non mesurable. La mesure extérieure n'est pas dénombrablement additive. Définition des ensembles mesurables au sens de Lebesgue. Les intervalles sont mesurables. Les ensembles mesurables forment une tribu. La mesure extérieure définit sur la tribu des ensembles mesurables une mesure positive qui coïncide avec la longueur sur les intervalles et qui est invariante par translation.

Programme traité lors du cours du 8 octobre

Espaces mesurés. **Notion de tribu. Stabilité par les lois d'intersection dénombrable, de différence, de différence symétrique. Tribu engendrée par une famille de parties, tribu des Boréliens. Mesure, espace mesuré. Exemples d'espaces mesurés : mesure de comptage sur l'ensemble des entiers, mesure de Lebesgue sur un segment fermé et borné, sur la droite numérique. Espaces de probabilité (et langage des probabilités). Propriétés élémentaires des mesures (mesure de la réunion d'une suite croissante de parties mesurables, de l'intersection d'une suite décroissante de parties intégrables). Définition d'une fonction mesurable.**

Programme traité lors du cours du 15 octobre

Espaces mesurés (fin). **Les ensembles mesurables au sens de Lebesgue sont les réunions d'un borélien et d'un négligeable. Complétion d'une tribu par rapport à une mesure et extension de la mesure à la tribu complétée.**
Fonctions mesurables. **Fonction mesurable d'un espace mesurable dans un autre. Composition des fonctions mesurables. Caractérisation des fonctions mesurables en utilisant une classe engendrant la tribu de l'espace d'arrivée. Fonction mesurable d'un espace mesurable dans un espace topologique. Fonctions boréliennes. Les fonctions continues sont boréliennes. Composition d'une fonction mesurable et d'une fonction borélienne. Fonctions mesurables à valeurs dans un produit d'espaces topologiques. Cas d'un produit d'espaces métriques séparables. Fonctions $\mu-$ mesurables sur un espace mesuré. Opérations sur les fonctions mesurables.**

Programme traité lors du cours du 22 octobre

Fonctions mesurables (fin). **Somme, produit, module d'une fonction réelle mesurable. Décomposition canonique en partie positive et négative. Borne supérieure et borne inférieure d'une suite de fonctions réelles mesurables. Limites simples de fonctions mesurables. Les fonctions dans la classe de Baire sont mesurables. Fonctions mesurables élémentaires. Approximation des fonctions mesurables par des fonctions élémentaires : en convergence presque partout, en limite croissante pour les fonctions positives, en convergence uniforme pour les fonctions bornées.**
Intégrale. **Intégrale supérieure d'une fonction mesurable positive. Premières propriétés.**

Programme traité lors du cours du 16 novembre

Fonctions intégrables et leur intégrale. **Intégrale des fonctions en escalier, propriétés élémentaires. Intégrale supérieure des fonctions positives : croissance, inégalité de Tchebychev et conséquences (une fonction positive d'intégrale supérieure finie est finie presque partout, une fonction positive d'intégrale supérieure nulle est nulle presque partout), additivité, théorème de convergence monotone, intégrale supérieure d'une série de fonctions positives. Lemme de Fatou. Fonctions intégrables à valeurs réelles ou complexes. Intégrale d'une fonction intégrable. Propriétés élémentaires de l'intégrale : linéarité, majoration du module de l'intégrale par l'intégrale du module. Espace vectoriel des fonctions intégrables. Espace vectoriel des classes (modulo égalité presque partout) de fonctions intégrables. Norme en moyenne d'ordre 1. Espace L^1. Continuité de l'intégrale. Exemples de fonctions intégrables (mesurables bornées à support intégrable ; fonctions continues à support compact sur la droite réelle). Une fonction Riemann intégrable sur un segment fermé et borné est Lebesgue intégrable.**

Programme traité lors du cours du 26 novembre

L'espace L^1. L'espace L^1 est de Banach (théorème de Fischer-Riesz). L'espace des fonctions intégrables étagées est dense dans L^1. Une suite de fonctions intégrables qui converge en moyenne d'ordre 1 vers une fonction f possède une sous-suite qui converge presque partout vers f. Exemple.
Théorèmes de convergence. Théorème de convergence dominée de Lebesgue. Cas des séries de fonctions intégrables. Exemples et contre-exemples. Théorème de la convergence monotone. Cas des séries de fonctions intégrables positives. Coïncidence de l'intégrale de Riemann et de Lebesgue pour une fonction Riemann intégrable.

Prévu pour le prochain cours

APPLICATIONS DU THÉORÈME DE LEBESGUE. Fonctions Lebesgue intégrables et fonctions d'intégrale absolument convergente. Théorèmes de continuité et de dérivabilité des fonctions définies par des intégrales.
MESURE PRODUIT. Définition de la mesure produit.