Mesure et Intégration (Licence L3)

Contrôle continu partiel du 17 décembre 2012

La durée de l'épreuve est de 1h30. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra ; un barème sur 24 points figure à titre indicatif. On attachera du prix à la présentation et à la rédaction des solutions.

EXERCICE 1 (sur 11 points)

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue λ sur $[0,+\infty[$.

Question 1 (2 points). Pour tout $\alpha > 0$, on pose $A_\alpha = \{x \geq 0 \,|\, |f(x)| \geq \alpha\}$. Montrer que A_α est Lebesgue mesurable et que $\lambda(A_\alpha) < +\infty$.

Question 2 (4 points). Montrer que $\int_{A_\alpha} |f(x)| dx \to 0$ quand $\alpha \to +\infty$. En déduire la limite de $\alpha\lambda(A_\alpha)$ quand $\alpha \to +\infty$.

Question 3 (5 points). a) Montrer que si $0 \leq x \leq n$, où n est un entier strictement positif, alors $ln(1 - \frac{x}{n}) \leq -\frac{x}{n}$.

b) Montrer que l'intégrale $I_n(f) = \int_o^n (1 - \frac{x}{n})^n e^x f(x) dx$ est bien définie et admet une limite $I(f)$ quand $n \to +\infty$.

c) Calculer la limite $I(f)$ lorsque $f(x) = e^{-x}$ ($x \geq 0$).

EXERCICE 2 (sur 13 points)

On note $L^1(]0,+\infty[)$ l'espace des fonctions réelles intégrables pour la mesure de Lebesgue λ sur $]0,+\infty[$. Pour $0 < \alpha < +\infty$, on considère la fonction f_α définie sur $]0,+\infty[$ par : $f_\alpha(x) = 0$ si $x > 0$ est rationnel, et $f_\alpha(x) = \frac{1}{\left[x(1 + ln^2 x)\right]^\alpha}$ si $x > 0$ est irrationnel. On note enfin g_α la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g_\alpha(x) = \frac{1}{\left[x(1 + ln^2 x)\right]^\alpha}$ ($x > 0$).

Question 1 (2 points). Montrer que les fonctions g_α et f_α sont Lebesgue-mesurables sur $]0,+\infty[$.

Question 2 (4 points). Soient ε, A des nombres positifs tels que $0 < \varepsilon < A$.

a) Montrer que la restriction de f_α à l'intervalle $[\varepsilon, A]$ n'est pas Riemann-intégrable.

b) Montrer que la restriction de f_α à l'intervalle $[\varepsilon, A]$ est Lebesgue-intégrable.

c) Montrer que : $f_\alpha \in L^1(]0,+\infty[) \Leftrightarrow g_\alpha \in L^1(]0,+\infty[)$.

Question 3 (3 points). Déterminer $\alpha \in]0,+\infty[$ pour que la fonction $h_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h_\alpha(u) = \dfrac{1}{(1+u^2)^\alpha} exp[-(\alpha - 1)u]$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$ pour la mesure de Lebesgue.

Question 4 (2 points). Déduire de la question 4 que l'intégrale $\int_\varepsilon^A g_\alpha(x)dx$ a une limite quand $\varepsilon \to 0$ et $A \to +\infty$ si et seulement si $\alpha = 1$.

Question 5 (2 points). Déduire de ce qui précède que $f_\alpha \in L^1(]0,+\infty[) \Leftrightarrow \alpha = 1$, et déterminer la valeur de $\int_O^{+\infty} f_1(x)dx$.

—