CORRIGÉ DE L'EXAMEN DE MESURE ET INTÉGRATION du 17 janvier 2013

EXERCICE 1

QUESTION 1. Comme $g(x)=d(x,F)$ est continue et que F est fermé, la fonction $f=g\mathbb{1}_{F^c}+2013\,\mathbb{1}_F$ est mesurable. Comme elle est bornée, elle est intégrable. ∎

QUESTION 2. Comme $f|_{F^c}$ est continue et que F^c est ouvert, tout point $x\in F^c$ est un point de continuité de f. Soit $x\in F$. Pour tout $n\geq 1$, $[x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}]\not\subset F$ (car F est négligeable) et il existe donc $x_n\in F^c$ tel que $|x_n-x|\leq\frac{1}{n}$, d'où $x=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$. Comme $f(x)=2013$ et que $|f(x_n)|\leq 2$, $f(x_n)\not\to f(x)$ et x est un point de discontinuité de f. Ainsi, F est l'ensemble des points de discontinuité de f. Comme f est bornée et que F est négligeable, f est Riemann-intégrable. ∎

EXERCICE 2

QUESTION 1. Sur $[0,1]$, $|e^{-x}\ln x|\leq|\ln x|$ et $x\mapsto|\ln x|$ est intégrable sur $[0,1]$ puisque $\int_\varepsilon^1|\ln t|\,dt=1+\varepsilon\ln\varepsilon-\varepsilon\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}1$. Sur $[1,+\infty[$, il existe une constante $C>0$ telle que $|e^{-x}\ln x|\leq Ce^{-\frac{x}{2}}$ et, comme $e^{-\frac{x}{2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, il en va de même de $e^{-x}\ln x$. Il s'ensuit que f est intégrable sur $[0,+\infty[$. ∎

QUESTION 2. Posons $f_n(x)=(1-\frac{x}{n})^n\ln x\,\mathbb{1}_{[0,n]}(x)$. Alors, on a $|f_n(x)|\leq e^{-x}|\ln x|$ car $\ln(1-\frac{x}{n})\leq-\frac{x}{n}$. Par ailleurs, $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}e^{-x}\ln(x)$. D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}\ln(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\int_0^n(1-\frac{x}{n})^n\ln x\,dx$. ∎

QUESTION 3. Par intégration par parties, on a :

$$\int_0^1 x^n\ln(1-x)\,dx=\left[\frac{x^{n+1}\ln(1-x)}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1}+\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1-x}\,dx$$

$$=\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}-1}{1-x}\,dx+\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{dx}{1-x}=-\frac{1}{n+1}\int_0^1(1+x+\dots+x^n)\,dx-\frac{1}{n+1}\Big[\ln(1-x)\Big]_{x=0}^{x=1}$$

$$=-\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n+1}\right).$$

En posant $x=n(1-t)$, on obtient :

$$\int_0^n(1-\frac{x}{n})^n\ln(x)\,dx=\int_0^1 nt^n(\ln n+\ln(1-t))\,dt=n\ln(n)\int_0^1 t^n\,dt$$

$$+n\int_0^1 t^n\ln(1-t)\,dt=\frac{n\ln(n)}{n+1}-\frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\frac{n}{n+1}\left[\ln(n)-\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n+1}\right)\right]\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^{+\infty}e^{-x}\ln x\,dx$$ en vertu de la question 2. Il s'ensuit que

$$1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n+1}-\ln(n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\gamma=-\int_0^{+\infty}e^{-x}\ln x\,dx.$$ ∎

QUESTION 4. Comme $|x^{a-1}e^{-x}| \leq x^{a-1}$ et que $x \mapsto x^{a-1}$ est intégrable sur $[0,1]$ puisque $a>0$, la fonction $x \mapsto x^{a-1}e^{-x}$ est intégrable sur $[0,1]$. Elle est également intégrable sur $[1,+\infty[$ car on a, pour x assez grand : $x^{a-1}e^{-x} \leq e^{-\frac{x}{2}}$. Donc $x \mapsto x^{a-1}e^{-x}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. ∎

QUESTION 5. Comme $(1-\frac{x}{n})^n x^{a-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-x}x^{a-1}$ et que

$\left|(1-\frac{x}{n})^n x^{a-1} \mathbb{1}_{[0,n]}(x)\right| \leq e^{-x}x^{a-1}$, il résulte du théorème de convergence dominée de Lebesgue que $\int_0^n (1-\frac{x}{n})^n x^{a-1}dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{a-1}dx$.

Mais on a, en posant $u=\frac{x}{n}$:

$$\int_0^n (1-\frac{x}{n})^n x^{a-1}dx = n^a \int_0^1 (1-u)^n u^{a-1}du \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{a-1}dx$$

∎

QUESTION 6. Comme $F(X)$ n'a que des pôles simples, on a :

$$\frac{n!}{X(X+1)\cdots(X+n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{X+k} \quad \text{avec } A_k = \left.\frac{n!\,(X+k)}{X(X+1)\cdots\cancel{(X+k)}\cdots(X+n)}\right|_{X=-k} = (-1)^k C_n^k.$$

D'après la formule du binôme, on a :

$$\int_0^1 (1-x)^n x^{a-1}dx = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^{k+a-1}\right)dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \times \frac{1}{a+k}$$

$$= \frac{n!}{a(a+1)\cdots(a+n)} \text{ en vertu de ce qui précède.}$$ ∎

QUESTION 7. Des questions 5 et 6, on déduit que :

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to+\infty} n^a \frac{n!}{a(a+1)\cdots(a+n)} \quad \text{(Formule d'Euler)}$$

En particulier, on a :

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n)}{n^a\, n!}. \quad \text{Or}$$

$$\frac{a(a+1)\cdots(a+n)}{n^a\, n!} = \frac{a(1+a)2(1+\frac{a}{2})\cdots n(1+\frac{a}{n})}{n^a n!} = \frac{a(1+a)(1+\frac{a}{2})\cdots(1+\frac{a}{n})}{n^a}$$

Par ailleurs, on a en vertu de la question 3 :

$$e^{\gamma a} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^a} e^{a+\frac{a}{2}+\cdots+\frac{a}{n+1}}$$

On en déduit que

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \lim_{n\to+\infty} e^{\gamma a} \cancel{n^a} e^{-(a+\frac{a}{2}+\cdots+\frac{a}{n+1})} \frac{a}{\cancel{n^a}}(a+1)(\tfrac{a}{2}+1)\cdots(\tfrac{a}{n}+1)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} a e^{\gamma a} \prod_{k=1}^{n} \left[(1+\frac{a}{k})e^{-\frac{a}{k}}\right] \quad \text{(Formule de Weierstrass).}$$

∎