CHAPITRE
2

Les matrices

Sommaire

§ 1 Définitions

2.1.1. Définitions.— Soient m et n deux entiers naturels non nuls. Une famille $(a^i_j)^{1\leqslant i\leqslant n}_{1\leqslant j\leqslant m}$, où, pour tous entiers i et j, a^i_j est un scalaire dans $\mathbb{K}$, est appelée une *matrice* de type (m,n) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

S'il n'y a pas de confusion, une telle matrice sera notée $[a^i_j]$ et représentée par un tableau de scalaires à n colonnes et m lignes :

$$\begin{bmatrix} a^1_1 & a^2_1 & \cdots & a^n_1 \\ a^1_2 & a^2_2 & \cdots & a^n_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^1_m & a^2_m & \cdots & a^n_m \end{bmatrix}$$

On note $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de type (m,n) à coefficients dans $\mathbb{K}$. Si $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on notera $\mathbf{A}^i_j$, le coefficient de $\mathbf{A}$ de la j-ième ligne de la i-ième colonne :

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} i \end{array} & \\ \begin{bmatrix} & \vdots & \\ & \mathbf{A}^i_j & \cdots \\ & & \end{bmatrix} & j \end{array}$$

Une matrice de type (n,n) est dite *carrée*. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de type (n,n). Une matrice de type $(m,1)$ est dite *colonne* et une matrice de type $(1,n)$ est dite *ligne*.

La *diagonale* d'une matrice carrée $\mathbf{A} = [a^i_j]$ de type (n,n) est formée des coefficients a^i_i, pour $i \in [\![1,n]\!]$; on note

$$\operatorname{diag}(\mathbf{A}) = (a^1_1, a^2_2, \ldots, a^n_n).$$

Une matrice est dite *diagonale* , si tous ses coefficients non diagonaux sont nuls, i.e., $a^j_i = 0$, pour tout $i \neq j$. On notera

$$\mathbf{Diag}\,(a_1,\ldots,a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_n \end{bmatrix}.$$

La *matrice identité* de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice diagonale $\mathbf{1}_n$, où tous les éléments de la diagonale sont égaux à 1 :

$$\mathbf{1}_n = \mathbf{Diag}\,(1,\ldots,1).$$

2.1.2. Matrices triangulaires.— Une matrice est dite *triangulaire supérieure* (resp. *triangulaire inférieure*), si tous ses coefficients en dessous (resp. au dessus) de la diagonale sont nuls, i.e., $a^i_j = 0$, pour tout $j > i$ (resp. $i < j$). Une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) sera notée

$$\begin{bmatrix} * & * & \ldots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \ldots & 0 & * \end{bmatrix} \quad \Bigg(\text{resp.} \begin{bmatrix} * & 0 & \ldots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \ldots & * & * \end{bmatrix}\Bigg).$$

1. Montrer que $u^2 = 0$.
2. Déterminer le rang, l'image et le noyau de u.
3. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 38.— Soit $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

1. Montrer que

$$\mathbf{A}^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{A})\mathbf{A} + \det(\mathbf{A})\mathbf{1}_2 = \mathbf{0}.$$

2. On suppose que le déterminant de $\mathbf{A}$ est non nul. Calculer l'inverse de $\mathbf{A}$.

Exercice 39.— Soient $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que

$$\mathbf{A}^2 = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{1}_n.$$

1. Montrer que si μ est non nul, la matrice $\mathbf{A}$ est inversible et que

$$\mathbf{A}^{-1} = \mu^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}_n).$$

2. Montrer que pour tout entier k, la matrice $\mathbf{A}^k$ s'écrit comme une combinaison linéaire des matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{1}_n$.

Exercice 40.— Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme non nul de E tel que $u^2 = 0$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.
2. Déterminer la dimension du noyau de u et de l'image de u.
3. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle l'endomorphisme u a pour matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 32.— Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$u\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ y-x \\ x-z \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Exprimer la matrice de u dans la base suivante de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

3. Écrire la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. Donner la matrice de u exprimée dans la base canonique.

Exercice 33.— Mêmes questions avec l'application u définie par

$$u\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ y+x \\ x+z \end{bmatrix}.$$

Exercice 34.— Pour chacune des applications de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ définies par

$$\mathbf{a})\ u\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-y \\ -x+2y-z \\ z-y \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b})\ u\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2y \\ x-2z \\ 2y+z \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c})\ u\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ y-z \\ x+z \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{d})\ u\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y+z \\ x+y-z \\ x+y+z \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Exprimer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que l'application linéaire u est inversible.
4. Déterminer $u^{-1}(x,y,z)$, pour tout vecteur (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 35.— Soit $\mathscr{T}^s$ (resp. $\mathscr{T}^i$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
1. Montrer que $\mathscr{T}^s$ et $\mathscr{T}^i$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{T}^s + \mathscr{T}^i$. Cette somme est-elle directe ?
3. Quels sont les dimensions des sous-espaces $\mathscr{T}^s$ et $\mathscr{T}^i$?

Exercice 36.— Montrer que toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

Exercice 37.— Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ représenté dans une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$ par la matrice

$$[u]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2.1.3. Matrices élémentaires.— Les *matrices élémentaires* de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont les matrices $\mathbf{E}_{(i,j)}$, où $(\mathbf{E}_{(i,j)})^l_k$ égale 1 si $k=j$ et $l=i$ et 0 sinon :

$$\mathbf{E}_{(i,j)} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}$$

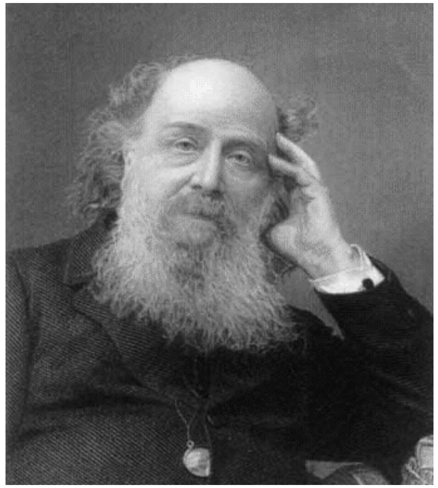

FIGURE 2.1.: James Joseph Sylvester (1814 - 1897)

Joseph Sylvester est un mathématicien anglais. Il introduit en 1951 le terme de matrice dans ses travaux géométriques. Il publie plusieurs mémoires dans lesquels il traduit des propriétés géométriques en terme de calcul de déterminant. Sylvester entretiendra une collaboration mathématique fructueuse avec le mathématicien Arthur Cayley. Ils travaillent notamment sur les invariants des formes quadratiques et les déterminants.

2.1.4. Espace vectoriel des matrices.— Soient m et n deux entiers naturels non nuls. On définit sur l'ensemble $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ les opération

i) d'*addition*, pour toutes matrices $\mathbf{A} = [a^i_j]$ et $\mathbf{B} = [b^i_j]$ de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a^i_j + b^i_j].$$

ii) la multiplication par un scalaire, pour toute matrice $\mathbf{A} = [a_i^j]$ de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et tout scalaire α de $\mathbb{K}$,

$$\alpha\mathbf{A} = [\alpha a_j^i].$$

2.1 Proposition.— Muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire l'ensemble $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ des matrices de type (m,n) forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension mn.

La famille des mn matrices élémentaires

$$\{\mathbf{E}_{(i,j)} \quad | \quad i \in [\![1,n]\!],\ j \in [\![1,m]\!]\}$$

de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ forme une base canonique du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

2.1.5. Sous-espaces vectoriels remarquables de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.— L'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ forme un sous-espace vectoriel de dimension n.

L'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ forme un sous-espace vectoriel de dimension $n(n+1)/2$.

2.1.6. Transposition.— La matrice *transposée* d'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est la matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, notée $\mathbf{A}^\top$ définie par

$$(\mathbf{A}^\top)_j^i = \mathbf{A}_i^j,$$

pour tous $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,m]\!]$. Pour toute matrice $\mathbf{A}$, on a

$$(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}.$$

La transposition est une application linéaire

$$\begin{aligned} {}^\top : \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ \mathbf{A} &\longmapsto \mathbf{A}^\top \end{aligned}$$

On vérifie que pour toutes matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et scalaire λ, on a

i) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top$,

ii) $(\lambda\mathbf{A})^\top = \lambda\mathbf{A}^\top$.

Exercice 1.— Établir ces relations.

2.1.7. Matrices symétriques et antisymétrique.— Une matrice carrée $\mathbf{S}$ est dite *symétrique* si $\mathbf{S}^\top = \mathbf{S}$. Une matrice carrée $\mathbf{A}$ est dite *antisymétrique* si $\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$.

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$) le sous-ensemble de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices symétriques (resp. antisymétriques).

où

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Exprimer le produit $\mathbf{AB}$ par blocs, puis calculer $\mathbf{AB}$.

Exercice 28.— Soient $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, $\mathbf{B} \in \mathscr{M}_{m,m}(\mathbb{K})$ et $\mathbf{C} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, telles que les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont inversibles. Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et calculer leur inverse

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

—

§ 8 Exercices

Exercice 29.— Parmi les sous-ensembles de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels :

a) les matrices symétriques,
b) les matrices diagonales,
c) les matrices inversibles,
d) les matrices non inversibles,
e) les matrices triangulaires,
f) les matrices triangulaires supérieures,
g) les matrices qui commutent avec une matrice donnée $\mathbf{A}$,
h) les matrices $\mathbf{A}$ telles que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$,
i) les matrices de trace nulle.

Exercice 30.— Donner les dimensions des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ suivants

a) le sous-espace vectoriel des matrices à coefficients constants,
b) le sous-espace vectoriel des matrices diagonales,
c) le sous-espace vectoriel des matrices symétriques,
d) le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques.

Exercice 31.— Trouver des bases de l'espace des lignes et de l'espace des colonnes de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Quelles sont les dimensions des noyaux de l'application linéaire représentée par $\mathbf{A}$ et de celle représentée par sa transposée. Déterminer des bases de ces noyaux.

2.14 Proposition.— Si la matrice produit $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ est partionnée de la façon suivante

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p_1 & \cdots & p_k \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{C}_1^1 & \cdots & \mathbf{C}_1^k \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{C}_j^1 & \cdots & \mathbf{C}_j^k \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} m_1 \\ \vdots \\ m_l \end{array}$$

alors, pour tous $r \in [\![1,l]\!]$ et $s \in [\![1,k]\!]$,

$$\mathbf{C}_r^s = \sum_{t=1}^{i} \mathbf{A}_r^t \mathbf{B}_t^s.$$

En particulier, on a par exemple,

$$\mathbf{C}_1^1 = \mathbf{A}_1^1\mathbf{B}_1^1 + \mathbf{A}_1^2\mathbf{B}_2^1 + \ldots + \mathbf{A}_1^i\mathbf{B}_i^1.$$

2.7.4. Exemples.—

a) Soient $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ dans $\mathscr{M}_{m,n_1}(\mathbb{K})$, $\mathscr{M}_{m,n_2}(\mathbb{K})$, $\mathscr{M}_{m,n_3}(\mathbb{K})$ respectivement et $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ dans $\mathscr{M}_{n_1,p}(\mathbb{K})$, $\mathscr{M}_{n_2,p}(\mathbb{K})$, $\mathscr{M}_{n_3,p}(\mathbb{K})$ respectivement, alors

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} = \mathbf{AD} + \mathbf{BE} + \mathbf{CF}.$$

b) Soient $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{m_1,n_1}(\mathbb{K})$, $\mathbf{B} \in \mathscr{M}_{m_1,n_2}(\mathbb{K})$, $\mathbf{C} \in \mathscr{M}_{m_2,n_1}(\mathbb{K})$, $\mathbf{D} \in \mathscr{M}_{m_2,n_2}(\mathbb{K})$ et $\mathbf{E} \in \mathscr{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$, $\mathbf{F} \in \mathscr{M}_{n_1,p_2}(\mathbb{K})$, $\mathbf{G} \in \mathscr{M}_{n_2,p_1}(\mathbb{K})$, $\mathbf{H} \in \mathscr{M}_{n_2,p_2}(\mathbb{K})$, alors

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \mathbf{G} & \mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{AE}+\mathbf{BG} & \mathbf{AF}+\mathbf{BH} \\ \mathbf{CE}+\mathbf{DG} & \mathbf{CF}+\mathbf{DH} \end{bmatrix}$$

c) Soient

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} p_1 & p_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} \quad \text{et} \quad \mathbf{x} = \begin{array}{c} 1 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array}$$

une matrice par blocs de $\mathscr{M}_{n_1+n_2,p_1+p_2}(\mathbb{K})$ et un vecteur de $\mathbb{K}^{p_1+p_2}$. On a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}\mathbf{x}_2 \\ \mathbf{C}\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}\mathbf{x}_2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 27.— Soient $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $\mathbf{B} \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ deux matrices partionnées en blocs de la façon suivante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} \end{bmatrix},$$

2.2 Proposition.— Les sous-ensembles $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ forment des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, avec

$$\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n^2-n}{2}, \quad \dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n^2+n}{2}.$$

De plus, on a

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$$

Exercice 2.— Soit $u : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'application définie par

$$u(\mathbf{A}) = \mathbf{A} + \mathbf{A}^\top,$$

pour tout $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application u est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le noyau de u.
3. Déterminer l'image de u.
4. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

§ 2 Produit de matrices

2.2.1. Produit de matrices.— On définit le *produit* (ou *multiplication*) d'une matrice $\mathbf{A}$ de type (m,n) par une matrice $\mathbf{B}$ de type (n,p), comme la matrice

$$\mathbf{AB} = [c_i^j], \quad \text{avec} \quad c_i^j = \sum_{k=1}^{n} a_i^k b_k^j.$$

Le produit de matrices vérifie les propriétés suivantes :

i) (associativité) pour toute matrices compatibles, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$,

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}.$$

ii) (matrices unitées) pour toute matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,

$$\mathbf{1}_m\mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{1}_n.$$

iii) (distributivité), pour toutes matrices compatibles $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$, on a

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}, \qquad (\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{D} = \mathbf{BD} + \mathbf{CD}.$$

On en déduit que

2.3 Proposition.— L'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées de type (n,n), muni de l'addition et de la multiplication, forme un anneau non commutatif.

L'unité de l'anneau est la matrice identité $\mathbf{1}_n$.

Exercice 3.— Montrer que l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas commutatif pour $n \geqslant 2$.

Exercice 4.— Montrer que, pour toutes matrices compatibles $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$, on a

$$(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top.$$

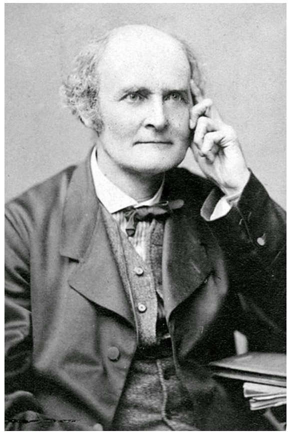

FIGURE 2.2.: Arthur Cayley (1821 - 1895)

Arthur Cayley est un mathématicien anglais auteur de nombreux travaux. Dans un article de 1855 publié dans le Journal de Crelle, il utilise la notion de matrice pour représenter des systèmes d'équations linéaires et des formes quadratiques. Les problèmes géométriques, comme les types d'intersection de coniques ou quadriques, exprimés en terme de déterminant, sont à l'origine de l'intérêt de Cayley pour la notion de matrice. Ses travaux sur les matrices conduisent à un mémoire intitulé « A memoir on the Theory of Matrices », publié en 1858 dans Philosophical Transactions of the Royal Society of London *dans lequel la notion de matrice fait l'objet d'une étude théorique indépendamment du contexte géométrique dans lequels elles apparaissent jusqu'alors.*

2.7.1. Matrices par blocs.— Exprimer une matrice par colonnes ou par lignes et un cas particulier de partitionnement de matrice. Plus généralement, soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, une partitionner $\mathbf{A}$ consiste à l'écire sous la forme

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} n_1 & \cdots & n_k \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^1 & \cdots & \mathbf{A}_1^k \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_l^1 & \cdots & \mathbf{A}_l^k \end{bmatrix} & \begin{matrix} m_1 \\ \vdots \\ m_l \end{matrix} \end{array}$$

où $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$, $m_1+m_2+\ldots+m_l = m$ et où $\mathbf{A}_i^j$ est une matrice de $\mathscr{M}_{n_j,m_i}(\mathbb{K})$, appelée *bloc* (i,j) ou *sous-matrice* (i,j) de la matrice $\mathbf{A}$.

Les opérations sur les matrices par blocs se définissent comme dans le cas des matrices définies par des scalaires ; il faut cependant tenir compte des compatibilités des tailles des blocs.

2.7.2. Addition par blocs.— Considérons deux matrices par blocs, partitionnées de la même façon :

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} n_1 & \cdots & n_k \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^1 & \cdots & \mathbf{A}_1^k \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_l^1 & \cdots & \mathbf{A}_l^k \end{bmatrix} & \begin{matrix} m_1 \\ \vdots \\ m_l \end{matrix} \end{array}, \qquad \mathbf{B} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} n_1 & \cdots & n_k \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^1 & \cdots & \mathbf{B}_1^k \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{B}_l^1 & \cdots & \mathbf{B}_l^k \end{bmatrix} & \begin{matrix} m_1 \\ \vdots \\ m_l \end{matrix} \end{array}.$$

La somme des matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ est une matrice $\mathbf{C}$ de même partion :

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} n_1 & \cdots & n_k \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^1 & \cdots & \mathbf{C}_1^k \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{C}_l^1 & \cdots & \mathbf{C}_l^k \end{bmatrix} & \begin{matrix} m_1 \\ \vdots \\ m_l \end{matrix} \end{array} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^1+\mathbf{B}_1^1 & \cdots & \mathbf{A}_1^k+\mathbf{B}_1^k \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_l^1+\mathbf{B}_l^1 & \cdots & \mathbf{A}_l^k+\mathbf{B}_l^k \end{bmatrix}.$$

2.7.3. Multiplication par blocs.— La multiplication par blocs est moins évidente. Considérons deux matrices par blocs

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} n_1 & \cdots & n_i \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^1 & \cdots & \mathbf{A}_1^i \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_j^1 & \cdots & \mathbf{A}_j^i \end{bmatrix} & \begin{matrix} m_1 \\ \vdots \\ m_l \end{matrix} \end{array} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} p_1 & \cdots & p_k \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^1 & \cdots & \mathbf{B}_1^k \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{B}_i^1 & \cdots & \mathbf{B}_i^k \end{bmatrix} & \begin{matrix} n_1 \\ \vdots \\ n_i \end{matrix} \end{array}.$$

Avec ces notations, on montre que (ce n'est pas immédiat)

iii) Ker $\mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$ si, et seulement si, rang $\mathbf{A} = n$,

iv) Ker $(\mathbf{A}^\top) = \{\mathbf{0}\}$ si, et seulement si, rang $\mathbf{A} = m$,

v) si $m = n$, alors $\mathbf{A}$ est inversible si, et seulement si, rang $\mathbf{A} = n$.

Soit $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\mathbf{Q} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $\mathbf{P} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ deux matrices inversibles, on a

$$\operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang}(\mathbf{QAP}).$$

En particulier si rang $\mathbf{A} = r$, il existe deux matrices inversibles $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ telles que

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\begin{bmatrix} \mathbf{1}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{P}.$$

2.13 Proposition.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ de rang r. Alors la matric $\mathbf{A}$ est équivalente à la matrice

$$\mathbf{J}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

En particulier, deux matrices de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si, et seulement si, elles ont même rang.

Soit $u : E \longrightarrow E'$ une application linéaire. On a défini le rang de u comme la dimension du sous-espace Im u. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ des bases de E et E' respectivement. On a

$$\operatorname{rang} u = \dim \operatorname{Im} u = \dim \operatorname{Vect}(u(\mathscr{B})).$$

Autrement dit le rang de u est le rang de la matrice $[u]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$.

Exercice 25.— Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.
1. Montrer que Im $(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ est un sous-espace de Im $(\mathbf{A})$ + Im $(\mathbf{B})$.
2. En déduire que rang $(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leqslant$ rang $(\mathbf{A})$ + rang $(\mathbf{B})$.

Exercice 26.— Soit $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $\mathbf{B} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ deux matrices. Montrer que

$$\operatorname{rang}([\mathbf{A}\ \ \mathbf{B}]) \leqslant \operatorname{rang}(\mathbf{A}) + \operatorname{rang}(\mathbf{B}) - \dim(\operatorname{Im}(\mathbf{A}) \cap \operatorname{Im}(\mathbf{B})).$$

§ 7 Opérations matricielles par blocs

Dans certaines situations, nous rencontrerons des matrices partionnées par blocs. Les opérations sur les matrices définies sur les scalaires, comme l'addition et la multiplication, se généralisent aux matrices partitionnées par blocs.

Ce mémoire conporte des résultats importants, en particulier, il formule le théorème dit de Cayley-Hamilton pour les matrices carrées d'ordre 3 *sans toutefois en publier de preuve*

Exercice 5.— Soient

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et $\mathbf{A}$ des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Décrire les lignes de la matrice $\mathbf{BA}$ en terme des lignes de $\mathbf{A}$ et les colonnes de la matrice $\mathbf{AB}$ en terme des colonnes de $\mathbf{A}$.

Exercice 6.— Soit $\mathbf{e}_i$ le vecteur colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ contenant 1 à la i-ième ligne et 0 sur les autres lignes. Étant donnée une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, décrire les produits suivants :

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{e}_i^\top \mathbf{A}, \qquad \mathbf{e}_i^\top \mathbf{A}\mathbf{e}_j.$$

Exercice 7.— Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Montrer que si $\mathbf{Ax} = \mathbf{Bx}$, pour tout vecteur colonne $\mathbf{x}$, alors $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Exercice 8.— Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & a \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

une matrice à coefficients réels.

1. Calculer $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$ et $\mathbf{A}^4$.
2. Donner l'expression de $\mathbf{A}^k$, pour tout entier naturel k.

Exercice 9.— Soient $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ deux matrices triangulaires supérieures.

1. Montrer que le produit $\mathbf{TT}'$ est une matrice triangulaire supérieure.
2. Déterminer la diagonale de la matrice $\mathbf{TT}'$.

Exercice 10.— Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, i.e., $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Montrer que le produit $\mathbf{AB}$ est une matrice symétrique.

2.2.2. Matrices inversibles.— Une matrice carrée $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *inversible*, s'il existe une matrice $\mathbf{B}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{1}_n \quad \text{et} \quad \mathbf{BA} = \mathbf{1}_n.$$

La matrice $\mathbf{B}$ est alors appelée la *matrice inverse* de $\mathbf{A}$, on note alors $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. On déduit immédiatement de cette définition que l'inverse d'une matrice est unique.

L'opération d'inversion vérifie les propriétés suivantes :

i) si $\mathbf{A}$ est inversible, $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$,

ii) si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont inversibles, alors $\mathbf{AB}$ est inversible et

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1},$$

iii) si $\mathbf{A}$ est inversible, alors sa transposée est inversible et

$$(\mathbf{A}^\top)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^\top.$$

Exercice 11.— Montrer ces trois propriétés.

On désigne par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \{\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathbf{A} \text{ est inversible}\}.$$

2.4 Proposition.— La multiplication des matrices munit l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ d'une structure de groupe.

Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, est appelé le *groupe linéaire* des matrices d'ordre n.

2.2.3. Calcul de l'inverse.— Déterminer si une matrice est inversible et le calcul des inverses sont des problèmes importants d'algèbre linéaire. Par exemple, considérons la matrice suivante de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{A}$ est-elle inversible ? L'équation matricielle suivante dans $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ avec } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

peut s'écrire sous la forme du système d'équations suivant

$$\left| \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + 3x_3 & = & b_1 \\ 2x_1 + x_3 & = & b_2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & = & b_3 \end{array} \right.$$

Pour résoudre ce systèmes, i.e., exprimer les coefficients du vecteur $\mathbf{x}$ en terme de ceux du vecteur $\mathbf{b}$ on procède en appliquant des opérations sur les lignes. Retranchons 3 fois la seconde équation à la première et 2 fois à la dernière, le système devient :

$$\left| \begin{array}{lcl} -5x_1 + x_2 & = & b_1 - 3b_2 \\ 2x_1 + x_3 & = & b_2 \\ -3x_1 + x_2 & = & -2b_2 + b_3 \end{array} \right.$$

Exercice 22.— Soit $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $\mathbf{B} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ deux matrices. Montrer que

$$\mathrm{Im}\,([\mathbf{A}\ \ \mathbf{B}]) = \mathrm{Im}\,(\mathbf{A}) + \mathrm{Im}\,(\mathbf{B}),$$

où $[\mathbf{A}\ \ \mathbf{B}]$ désigne la matrice constituée des blocs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$.

2.5.2. Noyau d'une matrice.— Si $u : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ est une application linéaire, le noyau de u est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ défini par

$$\mathrm{Ker}\, u = \{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n \mid u(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

De la même façon, si $\mathbf{A}$ est une matrice de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on définit le *noyau* de $\mathbf{A}$ comme le sous-espace vectoriel suivant de $\mathbb{K}^n$

$$\mathrm{Ker}\, \mathbf{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}.$$

Le noyau $\mathrm{Ker}\, \mathbf{A}$ est formé des solutions de l'équation

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}.$$

Exercice 23.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Décrire les sous-espaces

$$\mathrm{Ker}\,(\mathbf{A}), \qquad \mathrm{Ker}\,(\mathbf{A}^\top), \qquad \mathrm{Im}\,(\mathbf{A}), \qquad \mathrm{Im}\,(\mathbf{A}^\top).$$

Exercice 24.— Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices compatibles. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(\mathbf{B})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Ker}\,(\mathbf{AB})$.

§ 6 Rang d'une matrice

2.6.1. Définition.— Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle *rang* d'une famille de vecteurs $(\mathbf{x}_i)_i$ de E, la dimension du sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de E engendré par $(\mathbf{x}_i)_i$. En d'autres termes, le rang de la famille $(\mathbf{x}_i)_i$ est le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire de $(\mathbf{x}_i)_i$.

Définition 2.11.— Le *rang* d'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes dans $\mathbb{K}^m$. On le note $\mathrm{rang}\,\mathbf{A}$. Autrement dit,

$$\mathrm{rang}\,\mathbf{A} = \dim(\mathrm{Im}\,\mathbf{A}).$$

2.12 Proposition.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Le rang de $\mathbf{A}$ vérifie les propriétés suivantes :

i) $\mathrm{rang}\,\mathbf{A} \leqslant \inf\{m, n\}$,

ii) $\mathrm{rang}\,\mathbf{A} = \mathrm{rang}\,(\mathbf{A}^\top)$ (en particulier le rang de $\mathbf{A}$ est aussi le rang des vecteurs lignes),

2.5.1. Image d'une matrice.— Si $u : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ est une application linéaire, l'image de u est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$ défini par

$$\mathrm{Im}\, u = \{u(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n\}.$$

De la même façon, si $\mathbf{A}$ est une matrice de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on définit l'*image* de $\mathbf{A}$ comme le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$ engendré par les vecteurs $\mathbf{Ax}$, où $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$. Soit

$$\mathrm{Im}\, \mathbf{A} = \{\mathbf{Ax} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n\}.$$

2.10 Proposition.— L'image d'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$ engendré par les vecteurs colonnes de $\mathbf{A}$.

Preuve. Écrivons $\mathbf{A}$ selon ses vecteurs colonnes :

$$\mathbf{A} = \left[\ \mathbf{a}_*^1 \mid \mathbf{a}_*^2 \mid \ldots \mid \mathbf{a}_*^n\ \right].$$

Pour tout vecteur

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

de $\mathbb{K}^n$, on a

$$\mathbf{Ax} = \left[\ \mathbf{a}_*^1 \mid \mathbf{a}_*^2 \mid \ldots \mid \mathbf{a}_*^n\ \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_*^1 + x_2\mathbf{a}_*^2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_*^n.$$

Ainsi, $\mathbf{Ax}$ est une combinaison linéaire des vecteurs colonnes de $\mathbf{A}$, autrement dit $\mathrm{Im}\, \mathbf{A}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$ engendré par les vecteurs colonnes de $\mathbf{A}$. □

Exercice 19.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Im}\,(\mathbf{A})$ soit égal à $\mathbb{K}^n$. Justifier que la matrice $\mathbf{A}$ est inversible.

Exercice 20.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Soit $\mathscr{E}$ un sous-ensemble de vecteurs colonnes de $\mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{K})$, identifié à $\mathbb{K}^m$. L'*image de* $\mathscr{E}$ *par* $\mathbf{A}$ est l'ensemble, noté $\mathbf{A}(\mathscr{E})$, formé de tous les produits de $\mathbf{A}$ par un vecteur de $\mathscr{E}$, i.e.,

$$\mathbf{A}(\mathscr{E}) = \{\mathbf{Ax} \mid \mathbf{x} \in \mathscr{E}\}.$$

1. Montrer que si $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$, alors $\mathbf{A}(\mathscr{E})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
2. Montrer que si $\mathscr{E} = \mathrm{Vect}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p)$, alors $\mathbf{A}(\mathscr{E}) = \mathrm{Vect}(\mathbf{Ax}_1, \ldots, \mathbf{Ax}_p)$.

Exercice 21.— Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices compatibles. Montrer que $\mathrm{Im}\,(\mathbf{AB})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Im}\,(\mathbf{A})$.

Retranchons la dernière équation à la première, on obtient :

$$\left|\begin{array}{lcl} -2x_1 & = & b_1 - b_2 - b_3 \\ 2x_1 + x_3 & = & b_2 \\ -3x_1 + x_2 & = & -2b_2 + b_3 \end{array}\right.$$

On additionne la première équation à la seconde et on retranche $\frac{3}{2}$ de la première à la troisième, il reste :

$$\left|\begin{array}{lcl} -2x_1 & = & b_1 - b_2 - b_3 \\ x_3 & = & b_1 - b_3 \\ x_2 & = & -\frac{3}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + \frac{5}{2}b_3 \end{array}\right.$$

On obtient ainsi le système

$$\left|\begin{array}{lcl} x_1 & = & -\frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2}b_3 \\ x_2 & = & -\frac{3}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + \frac{5}{2}b_3 \\ x_3 & = & b_1 - b_3 \end{array}\right.$$

L'équation $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ admet une unique solution $\mathbf{x}$ donnée par le système précédent, ce qui s'écrit matriciellement sous la forme

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b},$$

avec

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

On vérifie que $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{1}_n$, la matrice $\mathbf{A}$ est donc inversible. Cet exemple illustre le calcul de l'inverse d'une matrice en effectuant la résolution d'un système linéaire à seconds membres. On notera cependant, que les matrices carrées ne sont pas toujours inversibles. Nous verrons plus loin d'autres méthodes permettant de déterminer si une matrice est inversible et de calculer l'inverse d'une matrice.

Exercice 12.— Montrer que les matrices suivantes ne sont pas inversibles

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 13.— Soit $\mathbf{A}$ un matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathbf{A}^2$ est inversible. Montrer que $\mathbf{A}$ est inversible.

II. *A Memoir on the Theory of Matrices.* By ARTHUR CAYLEY, *Esq., F.R.S.*

Received December 10, 1857,—Read January 14, 1858.

THE term matrix might be used in a more general sense, but in the present memoir I consider only square and rectangular matrices, and the term matrix used without qualification is to be understood as meaning a square matrix; in this restricted sense, a set of quantities arranged in the form of a square, *e. g.*

$$\left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)$$

is said to be a matrix. The notion of such a matrix arises naturally from an abbreviated notation for a set of linear equations, viz. the equations

$$\begin{aligned} X &= ax + by + cz, \\ Y &= a'x + b'y + c'z, \\ Z &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned}$$

may be more simply represented by

$$(X, Y, Z) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)(x, y, z),$$

and the consideration of such a system of equations leads to most of the fundamental notions in the theory of matrices. It will be seen that matrices (attending only to those of the same order) comport themselves as single quantities; they may be added, multiplied or compounded together, &c.: the law of the addition of matrices is precisely similar to that for the addition of ordinary algebraical quantities; as regards their multiplication (or composition), there is the peculiarity that matrices are not in general convertible; it is nevertheless possible to form the powers (positive or negative, integral or fractional) of a matrix, and thence to arrive at the notion of a rational and integral function, or generally of any algebraical function, of a matrix. I obtain the

FIGURE 2.3.: A Memoir on the Theory of Matrices

§ 3 Matrice d'une application linéaire

Soient E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriel de dimensions n et m respectivement. Considérons une base $\mathscr{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ de E et une base $\mathscr{B}' = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m)$ de E'.

Soit $u : E \longrightarrow E'$ une application linéaire. On peut exprimer l'image par u de chaque

2.3.5. Matrices équivalentes.— Deux matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites *équivalentes*, s'il existe deux matrice inversibles $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\mathbf{B} = \mathbf{PAQ}.$$

La relation d'*équivalence* est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Deux matrices semblables sont équivalentes.

§ 4 Trace d'une matrice

2.4.1. Définition.— La *trace* d'une matrice carrée $\mathbf{A} = [a^i_j]$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est la somme des coefficients de sa diagonale :

$$\operatorname{trace}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a^i_i.$$

2.8 Proposition.— L'application trace : $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire vérifiant, pour toutes matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\operatorname{trace}\mathbf{AB} = \operatorname{trace}\mathbf{BA}.$$

Exercice 16.— Étant donné deux matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, déterminer toutes les matrices $\mathbf{X}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\mathbf{X} + \operatorname{tr}(\mathbf{X})\mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

Exercice 17.— Montrer qu'il n'existe pas de matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \mathbf{1}_n.$$

2.4.2. Trace d'un endomorphisme.— De la proposition 2.8, on déduit que

2.9 Proposition.— Deux matrices semblables ont la même trace.

Exercice 18.— Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices carrées.

1. Montrer la relation $\operatorname{trace}\mathbf{AB} = \operatorname{trace}\mathbf{BA}$.
2. En déduire que deux matrices semblables ont la même trace.

§ 5 Noyau et image d'une matrice

Nous avons vu dans le chapitre précédent les notions de noyau et d'image d'une application linéaire. On peut définir de la même façon, le noyau et l'image d'une matrice.

La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$ est

$$\mathbf{P}_{\mathrm{can}}^{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On calcule l'inverse de la matrice de $\mathbf{P}_{\mathrm{can}}^{\mathscr{B}}$:

$$\mathbf{P}_{\mathrm{can}}^{\mathscr{B}\ -1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

L'expression de la matrice de u exprimée dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\begin{aligned} [u]_{\mathscr{B}} &= \mathbf{P}_{\mathrm{can}}^{\mathscr{B}\ -1}[u]_{\mathrm{can}}\mathbf{P}_{\mathrm{can}}^{\mathscr{B}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

D'où

$$[u]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On constate que cette nouvelle base permet d'exprimer plus simplement l'endomorphisme u. Nous retrouverons cet exemple en 4.3.4.

Exercice 14.— Écrire la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ donnée dans l'exemple 2.3.1 à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit p la projection donnée en 2.3.1. À l'aide de cette matrice de passage et de la matrice de l'endomorphisme p exprimée dans la base $\mathscr{B}$, calculer la matrice de p exprimée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2.3.4. Matrices semblables.— Deux matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites *semblables*, s'il existe une matrice inversible $\mathbf{P}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}.$$

La relation « être semblable à », dite relation de *similitude*, est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 15.— Montrer cette propriété.

Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

2.7 Proposition.— Deux matrices semblables ont même trace, même déterminant, même rang.

vecteur de la base $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{B}'$, on a :

$$\begin{aligned} u(\mathbf{e}_1) &= a_1^1\mathbf{f}_1 + a_2^1\mathbf{f}_2 + \cdots + a_m^1\mathbf{f}_m, \\ u(\mathbf{e}_2) &= a_1^2\mathbf{f}_1 + a_2^2\mathbf{f}_2 + \cdots + a_m^2\mathbf{f}_m, \\ &\ \ \cdots \\ u(\mathbf{e}_n) &= a_1^n\mathbf{f}_1 + a_2^n\mathbf{f}_2 + \cdots + a_m^n\mathbf{f}_m, \end{aligned}$$

avec $a_j^i \in \mathbb{K}$. La matrice

$$[a_j^i]_{1\leqslant j\leqslant m}^{1\leqslant i\leqslant n}$$

est appelée la *matrice de l'application linéaire u* exprimée dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, on la notera

$$[u]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}.$$

En résumé :

$$[u]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} u(\mathbf{e}_1) & u(\mathbf{e}_2) & \cdots & u(\mathbf{e}_n) \end{array} & \\ \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_m^1 & a_m^2 & \cdots & a_m^n \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_m \end{array} \end{array}.$$

Pour un endomorphisme $u : E \longrightarrow E$ de E et $\mathscr{B}$ une base de E, nous noterons $[u]_{\mathscr{B}}$ la matrice $[u]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}$.

2.3.1. Exemple.— Soit p l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui envoie un vecteur $\mathbf{x}$, sur sa projection orthogonale $p(\mathbf{x})$ sur le plan (Oxy) :

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &\longmapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

On considère la base de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$\mathscr{B} = \left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

On a

$$p(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_2, \quad p(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_2, \quad p(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = -3\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

Ainsi, la matrice de p exprimée dans la base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$[p]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.5 Proposition.— Soient E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie respectives n et m. L'application $\Phi : \mathscr{L}(E,E') \longrightarrow \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ définie par

$$\Phi(u) = [u]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. En particulier, les espaces vectoriels $\mathscr{L}(E,E')$ et $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ ont la même dimension, égale à mn.

Soient $u : E \longrightarrow E'$ et $v : E' \longrightarrow E''$ deux applications linéaires et $\mathscr{B}, \mathscr{B}', \mathscr{B}''$ des bases des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E, E' et E'' respectivement. Alors

$$[vu]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''} = [v]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''} [u]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}.$$

Soit $\mathbf{x}$ un vecteur de E de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ dans la base $\mathscr{B}$, on note $[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}}$ le vecteur colonne correspondant :

$$[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Avec les notations précédentes, on a :

$$[u(\mathbf{x})]_{\mathscr{B}'} = [u]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} [\mathbf{x}]_{\mathscr{B}}.$$

2.3.2. Matrices de passage.— Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Considérons $\mathscr{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ et $\mathscr{B}' = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$ deux bases de E. Tout vecteur $\mathbf{f}_i$, pour $i \in [\![1,n]\!]$, se décompose de façon unique dans la base $\mathscr{B}$:

$$\mathbf{f}_i = p_1^i \mathbf{e}_1 + \ldots + p_n^i \mathbf{e}_n, \quad \text{où } p_j^i \in \mathbb{K}.$$

La *matrice de passage* de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, est la matrice, notée $\mathbf{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $\mathbf{f}_i$ exprimés dans la base $\mathscr{B}$:

$$\mathbf{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} p_1^1 & \cdots & p_1^n \\ p_2^1 & & p_2^n \\ \vdots & & \vdots \\ p_n^1 & \cdots & p_n^n \end{bmatrix}$$

La matrice de passage $\mathbf{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ vérifie les propriétés suivantes :

i) $\mathbf{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = [\mathrm{id}_E]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$,

ii) $\mathbf{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est inversible et $(\mathbf{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'})^{-1} = \mathbf{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

Soit $\mathbf{x}$ un vecteur de E de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ dans la base $\mathscr{B}$ et de coordonnées $x'_1, \ldots, x'_n$ dans la base $\mathscr{B}'$. En notant

$$[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\mathbf{x}]_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix},$$

on a :

$$[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} = \mathbf{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} [\mathbf{x}]_{\mathscr{B}'},$$

ou de façon équivalente :

$$[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}'} = (\mathbf{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'})^{-1} [\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} = \mathbf{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} [\mathbf{x}]_{\mathscr{B}}.$$

2.6 Proposition.— Soient E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $u : E \longrightarrow E'$ une application linéaire. Soient $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ deux bases de E, $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ deux bases de E' et $\mathbf{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, $\mathbf{P}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$ les matrices de changements de bases associées. Alors,

$$[u]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{C}'} = (\mathbf{P}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'})^{-1} [u]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} \mathbf{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}.$$

En particulier, si u est un endomorphisme de E :

$$[u]_{\mathscr{B}'} = (\mathbf{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'})^{-1} [u]_{\mathscr{B}} \mathbf{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}.$$

2.3.3. Exemple.— Soit $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme défini par

$$u \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - z \\ y - z \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice de u dans la base canonique $\mathrm{can} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$[u]_{\mathrm{can}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On considère une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathscr{B} = \left\{ \mathbf{e}_1 = \mathbf{c}_1,\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{c}_2,\ \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$