CHAPITRE
1

# Les espaces vectoriels

## Sommaire



Nous rappelons dans ce chapitre les notions d'algèbre linéaire abordées en première année. Pour une bonne compréhension des prochains chapitres, il est important que ces notions soient bien assimilées. Ce chapitre constitue un recueil de résultats sans démonstration. Le lecteur est renvoyé à son cours de première année, ou aux ouvrages suivants pour tout approfondissement de François Liret et Dominique Martinais [**?**], ainsi que de celui de Joseph Grifone [**?**] pour tout approfondissement.

Ces deux références proposent un cours complété d'exercices avec solutions, la seconde référence couvre une partie des notions abordées dans ce cours.

## § 1 La structure d'espace vectoriel

**1.1.1. Un prototype.—** L'espace vectorie réel $\mathbb{R}^n$ est le prototype d'espace vectoriel réel de dimension finie. Ses éléments sont les $n$-uplets ordonnées de nombres réels $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, que nous écrirons sous la forme de *vecteur colonne* :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Les opérations d'addition et de multiplication de nombre réels permettent de définir deux opérations sur $\mathbb{R}^n$, l'addition de vecteurs :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix}$$

et la multiplication d'un vecteur par un nombre réel, pour tout réel $\lambda$,

$$\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}.$$

Ces deux opérations ont des propriétés héritées de celles satisfaites par les opérations d'addition et de multiplication sur les nombres réels. On peut vérifier ainsi que, l'addition de $n$-uplets satisfait les relations suivantes :

**i)** pour tous $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, on a $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$,

**ii)** pour tous $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, on a $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x}$,

**iii)** si $\mathbf{0}$ désigne le $n$-uplet $(0,0,\ldots,0)$, on a $\mathbf{x}+\mathbf{0} = \mathbf{x}$,

**iv)** en notant $-(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, le $n$-uplet $(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n)$, on a $\mathbf{x}+(-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

D'autre part, la mupliplication par un nombre réel satisfait les relations suivantes :

**v)** pour tous $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ et tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, on a $\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$,

**vi)** pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, on a $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Enfin, les opérations d'addition et de multiplication par un réel vérifient des relations de compatibilités entre elles :

**vii)** pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tous $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, on a $\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}$,

**viii)** pour tous $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ et tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, on a $(\lambda+\mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{x}$.

**1.1.2. D'autres exemples.—** Il existe d'autres ensembles qui munis d'une opération d'addition et de multiplication par un réel satisfont les mêmes relations.

Par exemple, considérons l'ensemble $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues sur l'intervale réel $[0,1]$ et à valeurs réelles. Si $f$ et $g$ sont deux telles fonctions, on définit leur addition en posant, pour tout réel $x \in [0,1]$,

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x),$$

et la multiplication d'une fonction $f$ par un réel $\lambda$, en posant

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$



**1.** Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$[u]_{can} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Déterminer Ker $u$, Ker $u^2$, Im $u$, Im $u^2$.

**2.** Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

**a)** $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$,

**b)** $E = \mathrm{Ker}\, u + \mathrm{Im}\, u$

**c)** $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, u^2$,

**d)** $\mathrm{rang}\, u = \mathrm{rang}\, u^2$

**e)** $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2$,

**f)** $\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, u = \{\mathbf{0}\}$

**Exercice 24.—** Soit $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes

**a)** $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u$,

**b)** $u^2 = 0$ et $n = 2.\mathrm{rang}\,(u)$.

**Exercice 25.—** Soient $E$, $F$ et $G$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u : E \longrightarrow F$, $v : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires.

**1.** Montrer que $u(\mathrm{Ker}\,(v\circ u)) = \mathrm{Ker}\, v \cap \mathrm{Im}\, u$.

**2.** Montrer que $v^{-1}(\mathrm{Im}\,(v\circ u)) = \mathrm{Ker}\, v + \mathrm{Im}\, u$.

**2.** Supposons que $p+q$ est un projecteur de $E$. Montrer l'égalité :

$$\mathrm{Im}\,(p+q) = \mathrm{Im}\,(p) + \mathrm{Im}\,(q).$$

**3.** Supposons que $p+q$ est un projecteur de $E$. Montrer l'égalité :

$$\mathrm{Ker}\,(p+q) = \mathrm{Ker}\,(p) \cap \mathrm{Ker}\,(q).$$

**Exercice 18.—** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ et soient $p$ et $q$ deux endomorphismes de $E$ vérifiant

$$p+q = \mathrm{id}_E, \quad \text{et} \quad \mathrm{rang}\,(p) + \mathrm{rang}\,(q) \leqslant n.$$

**1.** Montrer que Im $p$ et Im $q$ sont supplémentaires dans $E$.
**2.** Montrer que $\mathrm{rang}\,(p) + \mathrm{rang}\,(q) = n$.
**3.** Montrer que $p$ et $q$ sont des projecteurs.

**Exercice 19.—** Soit $p$ un projecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$.
**1.** Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p$.
**2.** La réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 20.—** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que si $p$ est un projecteur de $E$, alors

$$\mathrm{rang}(p) = \mathrm{trace}(p).$$

—

## § 5 Exercices

**Exercice 21.—** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u$ un endomorphisme de $E$. Montrer que $u$ est une homothétie si, et seulement si, pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de $E$, la famille $(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$ est liée.

**Exercice 22.—** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, pas nécessairement de dimension finie et soit $u$ un endomorphisme de $E$.
**1.** Montrer que $\mathrm{Ker}\, u \subseteq \mathrm{Ker}\, u^2$ et $\mathrm{Im}\, u^2 \subseteq \mathrm{Im}\, u$.
**2.** Montrer que $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2$ si, et seulement si, $\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, u = \{\mathbf{0}\}$.
**3.** Montrer que $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, u^2$ si, et seulement si, $E = \mathrm{Ker}\, u + \mathrm{Im}\, u$.

**Exercice 23.—** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $u$ un endomorphisme de $E$. D'après le théorème du rang, on a l'égalité

$$\dim E = \dim(\mathrm{Ker}\, u) + \dim(\mathrm{Im}\,(u)).$$

Ce qui n'entraîne pas en général que $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$.



Ces opérations ainsi définies statisfont les propriétés **i)-viii)** ci-dessus, en prenant pour zéro dans **iii)** la fonction nulle et en notant dans **iv)** $-f$, la fonction définie par

$$(-f)(x) = -f(x).$$

Un autre exemple, on vérifiera que les mêmes opérations sur l'ensemble des fonctions deux fois différentiables qui satisfont

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \lambda \frac{df}{dt} + \mu f = 0$$

satisfont les propriétés **i)-viii)**.

En remplaçant le corps des réels par un corps quelconque $\mathbb{K}$, on obtient la struture d'espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, tel que $\mathbb{K}$ lui-même ou bien $\mathbb{K}^n$.

**1.1.3. Définition.—** Un *espace vectoriel* sur un corps $\mathbb{K}$, ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel, est un ensemble $E$ muni d'une addition $+ : E \times E \longrightarrow E$ et d'une application

$$\begin{aligned} . : \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, \mathbf{x}) &\longmapsto \lambda.\mathbf{x} \end{aligned}$$

appelée loi externe, on notera aussi $\lambda\mathbf{x}$ pour $\lambda.\mathbf{x}$, qui vérifient les propriétés suivantes,

**i)** l'ensemble $E$ muni de l'addition est un groupe abélien,
**ii)** pour tout $\mathbf{x} \in E$, $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$,
**iii)** pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ :

$$\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x},$$
$$(\lambda+\mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x},$$
$$\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}.$$

Les éléments d'un espace vectoriel $E$ sont appelés *vecteurs* et les éléments du corps $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*.

**Exercice 1.—** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrer que, pour tout vecteur $\mathbf{x}$ et scalaire $\lambda$, on a les relations :

**a)** $\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$,
**b)** $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$,
**c)** $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$,
**d)** $\lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$ si, et seulement si, $\lambda = 0$ ou $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,
**e)** $-(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(-\mathbf{x}) = (-\lambda)\mathbf{x}$.

**1.1.4. Combinaisons linéaires.—** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p$ des vecteurs de $E$. On appelle *combinaison linéaire* des vecteurs $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p$ tout vecteur de la forme

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_p\mathbf{x}_p,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$.

Plus généralement, si $(\mathbf{x}_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs de $E$, on appele *combinaison linéaire* des $(\mathbf{x}_i)_{i\in I}$ toute somme

$$\sum_{i\in I} \lambda_i \mathbf{x}_i,$$

dans laquelle, pour tout $i \in I$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et où les $\lambda_i$ sont tous nuls sauf un nombre fini.

**1.1.5. Sous-espaces vectoriels.—** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un *sous-espace vectoriel* de $E$ est un sous ensemble $F$ de $E$ tel que les opérations de $E$ induisent sur $F$ une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Un sous-ensemble $F$ de $E$ est donc un sous-espace vectoriel si les assertions suivantes sont vérifiées :

**i)** $\mathbf{0} \in F$,

**ii)** pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in F$, $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in F$,

**iii)** pour tout $\mathbf{x} \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda\mathbf{x} \in F$.

**1.1.6. Exemples.—**

**a)** Le sous-ensemble $\{\mathbf{0}\}$ réduit au vecteur nul et $E$ sont des sous-espaces vectoriel de $E$.

**b)** Soit $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Le sous-ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$ formé des polynômes de degré au plus $n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

**Exercice 2.—** Montrer qu'une intersection de sous-espaces vectoriels de $E$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**1.1.7. Faits.—** Un sous-ensemble $F$ de $E$ est un sous-espace vectoriel si, et seulement si, toute combinaison linéaire de vecteurs de $F$ est un vecteur de $F$. Pour montrer qu'un sous-ensemble $F$ de $E$ est un sous-espace vectoriel, il suffit alors de montrer que $\mathbf{0} \in F$ et que $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}$, pour tous vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in F$ et scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

**Exercice 3.—** Soit $\alpha$ un réel. On considère le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}^3$ :

$$F_\alpha = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2+x_3 = \alpha\}$$

Montrer que $F_\alpha$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, si et seulement si, $\alpha = 0$.

## § 2 Bases et dimension d'un espace vectoriel

**1.2.1. Sous-espace vectoriel engendré par une partie.—** Une intersection de sous-espaces vectoriels de $E$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A$ une partie de $E$. L'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de $E$ qui contiennent $A$ est le plus petit sous-espace vectoriel de $E$, au



**ii)** $\mathrm{Im}\ p_F = F$ et $\mathrm{Im}\ p_G = F$,

**iii)** $\mathrm{Ker}\ p_F = G$ et $\mathrm{Ker}\ p_G = F$.

**iv)** $p_F + p_G = \mathrm{id}_E$,

**v)** $p_F p_G = p_G p_F = 0$.

L'assertion **i)** découle de la définition de $p_F$ et $p_G$. Si $\mathbf{x} \in E$, alors $p_F(\mathbf{x})$ est un vecteur de $F$ d'où $p_F(p_F(\mathbf{x})) = p_F(\mathbf{x}) + \mathbf{0}$. On montre de la même façon que $p_G^2 = p_G$. L'assertion **ii)** est une conséquence immédiate de la définition de $p_F$ et $p_G$.

Pour montrer **iii)**, considérons $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}\ p_F$, alors $\mathbf{x} = p_G(\mathbf{x})$ donc $\mathbf{x} \in G$. Inversement, si $\mathbf{x} \in G$, on a $p_F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. On montre de la même façon que $\mathrm{Ker}\ p_G = F$.

L'assertion **iv)** correspond à la décomposition $\mathbf{x} = p_F(\mathbf{x}) + p_G(\mathbf{x})$. L'assertion **v)** est obtenue en composant la relation $\mathrm{id}_E = p_F + p_G$ par $p_F$ et $p_G$.

Inversement, supposons qu'il existe deux applications linéaires

$$p : E \longrightarrow F, \quad q : E \longrightarrow G,$$

telles que $\mathrm{id}_E = p+q$ et $pq = qp = 0$. On montre alors que $E = F \oplus G$. Plus généralement, on a :

**1.11 Proposition.—** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient $E_1, \ldots, E_k$ des sous-espaces vectoriel de $E$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_k$ est qu'il existe des applications linéaires $p_i : E \longrightarrow E_i$, $i \in [\![1,k]\!]$ vérifiant les deux assertions suivantes :

**i)** $\mathrm{id}_E = p_1 + \ldots + p_k$,

**ii)** $p_i p_j = 0$, pour tout $i \neq j$.

Pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $p_i$ est appelé la projection sur $E_i$ parallèlement au sous-espace $\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} E_j$.

Les projection $p_i$ sont des projecteurs, $p_i^2 = p_i$, et satisfont

$$\mathrm{Ker}\ p_i = \bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} E_j, \qquad \mathrm{Im}\ p_i = E_i.$$

**Exercice 16.—** Établir les deux propriétés précédentes.

**Exercice 17.—** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient $p$ et $q$ deux projecteurs de $E$. On suppose que le corps $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2.

**1.** Montrer que $p+q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p = 0$.

**iii)** $u$ est bijective

**iv)** $\operatorname{Ker} u = \{\mathbf{0}\}$,

**v)** $\operatorname{Im} u = E'$,

**vi)** $\operatorname{rang} u = \dim E$.

**1.4.9. Remarque.—** Attention, ce résultat est faux en dimension infinie. En effet, l'application

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P(X) &\longmapsto P'(X) \end{aligned}$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Son noyau est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes constants. L'endomorphisme $u$ n'est donc pas injectif, alors qu'il est surjective. En effet $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}[X]$, car, pour tout polynôme $P$ de $\mathbb{R}[X]$, il existe un polynôme $Q(X) = \int_0^X P(t)dt$ tel que $u(Q) = P$. Par exemple, si

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i,$$

on pose

$$Q(X) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} X^{i+1}.$$

On a alors $u(Q) = P$.

**Exercice 15.—** Montrer que l'application

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P(X) &\longmapsto XP(X) \end{aligned}$$

est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}[X]$, mais pas surjectif.

**1.4.10. Les projecteurs.—** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un endomorphisme $p$ de $E$ tel que $p^2 = p$ est appelé *projecteur* de $E$.

Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ tels que $E = F \oplus G$. Alors tout vecteur $\mathbf{x}$ de $E$ s'écrit de façon unique en $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, avec $\mathbf{y} \in F$ et $\mathbf{z} \in G$. On considère l'endomorphisme $p_F$ de $E$ défini par $p_F(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. On dit que $p_F$ est la *projection sur $F$ parallèlement à $G$*. On définit de la même façon, la *projection sur $G$ parallèlement à $F$*, comme l'endomorphisme $p_G$ de $E$ défini par $p_G(\mathbf{x}) = \mathbf{z}$. Pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de $E$, on a

$$\mathbf{x} = p_F(\mathbf{x}) + p_G(\mathbf{x}).$$

Ainsi définis, les endomorphismes $p_F$ et $p_G$ vérifient les assertions suivantes

**i)** $p_F$ et $p_G$ sont des projecteurs, i.e., $p_F^2 = p_F$ et $p_G^2 = p_G$,



sens de l'inclusion, contenant $A$. On l'appelle *sous-espace vectoriel engendré* par $A$ et on le note $\operatorname{Vect}(A)$.

Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect}(A)$ est formé de toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de $A$.

**1.2.2. Exemples.—** Le sous-espace vectoriel engendré par l'ensemble vide est $\{\mathbf{0}\}$. ; on a $\operatorname{Vect}(\{\mathbf{0}\}) = \{\mathbf{0}\}$.

Pour tous vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$,

$$\operatorname{Vect}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \operatorname{Vect}(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

**Exercice 4.— 1.** Montrer que l'ensemble $A = \{(1,0),(0,1)\}$ engendre $\mathbb{R}^2$.
**2.** Montrer que l'ensemble $A = \{(x, x^2, x^3) \mid x \in \mathbb{R}\}$ n'engendre pas $\mathbb{R}^3$.

**1.2.3. Famille génératrice.—** Une famille $(\mathbf{x}_i)_{i \in I}$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ est dite *génératrice* si $E = \operatorname{Vect}((\mathbf{x}_i)_{i \in I})$.

**1.2.4. Famille libre.—** Une famille $(\mathbf{x}_i)_{i \in I}$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ est dite *libre*, ou *linéairement indépendante*, si pour toute combinaison linéaire vérifiant

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0},$$

alors, pour tout $i \in I$, $\lambda_i = 0$. Autrement dit, aucun des vecteurs de la famille $(\mathbf{x}_i)_{i \in I}$ n'est combinaison linéaire des autres. Un famille qui n'est pas libre est dite *liée*.

Les éléments d'une famille libre sont non nuls et tous distincts. Toute sous-famille d'une famille libre est libre

**Exercice 5.—** Montrer cette propriété.

**1.2.5. Base d'un espace vectoriel.—** Une famille libre et génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ est appelée un *base* de $E$. Si $(\mathbf{e}_i)_{i \in I}$ une base de $E$, tout vecteur $\mathbf{x}$ de $E$ s'écrit de façon unique

$$\mathbf{x} = \sum_{i \in I} \lambda_i \mathbf{e}_i.$$

Les scalaires $\lambda_i$ s'appellent les *coordonnées* de $\mathbf{x}$ dans la base $(\mathbf{e}_i)_{i \in I}$.

Tout élément non nul de $\mathbb{K}$ forme une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$. Le couple $(1, i)$ forme une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

**1.2.6. Base canonique.—** Lorsqu'un espace est muni naturellement d'une base particulière, elle est dite *canonique*. Par exemple, la famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la base canonique de $\mathbb{K}[X]$. La famille $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

**1.2.7. Le concept de dimension.—** Un espace vectoriel est dit de *dimension finie*, s'il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit qu'il est de *dimension infinie*.

On a le théorème fondamental d'existence de base dans les espaces vectoriels de dimension finie.

**1.1 Théorème.—** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie. Soient $\mathscr{G}$ une famille génératrice de $E$ et $\mathscr{L} \subset \mathscr{G}$ une famille libre. Alors, il existe une base $\mathscr{B}$ de $E$ vérifiant $\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{G}$.

De ce résultat on déduit que, pour tout espace vectoriel de dimension finie $E$

**i)** de toute famille génératrice de $E$, on peut extraire une base de $E$,

**ii)** (théorème de la base incomplète) toute famille libre peut être complétée en une base.

Enfin, le théorème de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.

**1.2 Théorème.—** Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

Ce nombre est appelé la *dimension* de $E$ et est noté $\dim_{\mathbb{K}} E$, ou $\dim E$, s'il n'y a pas de confusion.

**1.3 Proposition.—** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Alors $F$ est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$. De plus, $F$ est égal à $E$ si, et seulement si, $\dim F = \dim E$.

Par exemple, l'espace $\mathbb{K}^n$ est de dimension $n$. L'espace $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré inférieur ou égal à $n$ admet comme base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ et est donc de dimension $n+1$. L'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

## § 3 Somme de sous-espaces vectoriels

**1.3.1. Somme de sous-espaces.—** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. La réunion de $F$ et $G$ n'est pas en général un sous-espace vectoriel de $E$

**Exercice 6.—** Donner des contre-exemples.

Le plus petit sous-espace vectoriel contenant $F$ et $G$ est le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(F \cup G)$. Ce sous-espace vectoriel est décrit par

$$\mathrm{Vect}(F \cup G) = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in F \times G\}.$$



**1.4.7. Rang d'une application linéaire.—** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le rang d'une famille finie $\mathscr{V}$ de vecteurs de $E$ est la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\mathscr{V})$ engendré par les vecteurs de $\mathscr{V}$, on le note $\mathrm{rang}\,\mathscr{V}$.

Par exemple, si

$$\mathscr{V} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

on a $\mathrm{rang}\,\mathscr{V} = 2$.

Soit $u : E \longrightarrow E'$ une application linéaire. L'application $u$ est dite de rang fini si le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}\, u$ est de dimension finie. L'entier $\dim(\mathrm{Im}\, u)$ est alors appelé le *rang* de $u$ et est noté $\mathrm{rang}\, u$.

**1.4.8. Le théorème du rang.—** Étant donnée une application linéaire $u : E \longrightarrow E'$, on considère les ensembles $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ qui sont respectivement sous-espaces vectoriels de $E$ et $E'$. Soit $\mathscr{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$ une base de $\mathrm{Ker}\, u$. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter cette base en une base $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$ de $E$. Alors la famille $(u(\mathbf{e}_{k+1}), \ldots, u(\mathbf{e}_n))$ est une base du sous-espace $\mathrm{Im}\, u$, cf. exercice 14. On en déduit une formule très utile reliant les dimensions des sous-espaces $\mathrm{Ker}\, u$, $\mathrm{Im}\, u$ avec celle de $E$ :

**1.9 Théorème (La formule du rang).—** Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $u : E \longrightarrow E'$ une application linéaire à valeurs dans un espace vectoriel $E'$. Alors

$$\dim E = \dim(\mathrm{Ker}\, u) + \mathrm{rang}\, u.$$

**Exercice 14.—** Soient $E$ et $E'$ des espaces vectoriels et $u : E \longrightarrow E'$ une application linéaire. On suppose que $E$ est de dimension finie. D'après la proposition 1.5, il existe alors un supplémentaire $F$ du sous-espace $\mathrm{Ker}\, u$ dans $E$.

Montrer que la restriction de l'application $u$ à $F$

$$\begin{aligned} u_{|F} : F &\longrightarrow \mathrm{Im}\, u \\ \mathbf{x} &\longmapsto u(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de $F$ sur $\mathrm{Im}\, u$.

On déduit du théorème 1.9, le résultat suivant :

**1.10 Proposition.—** Soit $u : E \longrightarrow E'$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriel de même dimension finie. Les assertions suivantes sont équivalentes :

**i)** $u$ est injective,

**ii)** $u$ est surjective,

**c)** Soit $p$ l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui envoie un vecteur sur sa projection orthognonale sur le plan xy :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

est une application linéaire.

**1.4.4. Image d'une application linéaire.—** Soient $u : E \longrightarrow E'$ une application linéaire et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Alors l'image directe par $u$ du sous-espace $F$, donnée par

$$u(F) = \{\mathbf{y} \in E' \mid \exists \mathbf{x} \in F,\ \mathbf{y} = u(\mathbf{x})\}$$

est un sous-espace vectoriel de $E'$

**Exercice 11.—** Montrer que $u(F)$ est un sous-espace vectoriel.

On appelle *image* de $u$, et on note $\mathrm{Im}\, u$, le sous-espace vectoriel $u(E)$.
L'application $u$ est surjective si, et seulement si, $\mathrm{Im}\, u = E'$.

**1.4.5. Sous-espace vectoriel stable.—** Soient $u$ un endomorphisme de $E$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. On dit que $u$ laisse *stable* $F$ si $u(F)$ est un sous-espace vectoriel de $F$.

Par exemple, étant donné $\mathbf{x} \in E$, un endomorphisme $u$ de $E$ laisse stable la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(\mathbf{x})$ si, et seulement si, les vecteurs $u(\mathbf{x})$ et $\mathbf{x}$ sont colinéaires. Autrement dit, si $u$ est une homothétie.

**1.4.6. Noyau d'une application linéaire.—** Soient $u : E \longrightarrow E'$ une application linéaire et $F'$ un sous-espace vectoriel de $E'$. Alors, l'image réciproque par $u$ de $F'$

$$u^{-1}(F') = \{\mathbf{x} \in E \mid u(\mathbf{x}) \in F'\}$$

est un sous-espace vectoriel de $E$.

**Exercice 12.—** Montrer que $u^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

On appelle *noyau* de $u$, et on note $\mathrm{Ker}\, u$, le sous-espace vectoriel $u^{-1}(\mathbf{0})$.

**1.8 Proposition.—** Une application linéaire $u$ est injective si, et seulement si, $\mathrm{Ker}\, u = \{\mathbf{0}\}$.

**Exercice 13.—** Montrer la proposition 1.8.



Ce sous-espace vectoriel est appelé la *somme de $F$ et $G$*, on le note $F+G$.

Plus généralement, si $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriel de $E$, on note $\sum_{i\in I} E_i$ le sous-espace vectoriel de $E$ formé des combinaisons linéaires

$$\sum_{i\in I} \mathbf{x}_i,$$

où les $\mathbf{x}_i \in E_i$, $i \in I$, sont tous nuls sauf une nombre fini. L'espace $\sum_{i\in I} E_i$ est appelé la *somme* des sous-espaces vectoriels $E_i$, $i \in I$.

**Exercice 7.—** Soient $E$ un espace vectoriel et $F$, $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.

**1.** Montrer que $F \cap G = F + G$ si, et seulement si, $F = G$.
**2.** Montrer que la réunion $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E$ si, et seulement si, $F \subset G$ ou $G \subset F$.

**1.3.2. Somme de sous-espaces supplémentaires.—** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

**i)** pour tout vecteur $\mathbf{x} \in E$, il existe un unique couple $(\mathbf{y},\mathbf{z}) \in F \times G$ tel que

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}.$$

**ii)** $E$ est égal à la somme $F+G$ des sous-espaces $F$ et $G$ et $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$.

On dit que $F$ et $G$ sont deux *sous-espaces vectoriels supplémentaires* de $E$ lorsqu'ils satisfont ces propriétés. On dit aussi que $E$ est la *somme directe* des sous-espaces $F$ et $G$ et on écrit :

$$E = F \oplus G.$$

**Exercice 8.—** Montrer l'équivalence des assertions **i)** et **ii)**.

En résumé :

**1.4 Proposition.—** Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Alors $E = F \oplus G$ si, et seulement si, les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

**i)** $E = F + G$,
**ii)** $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$.

**1.5 Proposition.—** Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet au moins un supplémentaire.

**Exercice 9.—** On considère les trois sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^2$ :

$$F = \mathbb{R} \times \{\mathbf{0}\}, \qquad G = \{\mathbf{0}\} \times \mathbb{R}, \qquad H = \{(\mathbf{x},\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que $F \cap G = F \cap H = G \cap H = \{\mathbf{0}\}$ et que la somme $F+G+H$ n'est pas directe.

**1.3.3. Somme directe d'une famille de sous-espaces.—** Plus généralement, soient $E_1, \ldots, E_p$ des sous-espaces vectoriel de $E$. On dit que $E$ est *somme directe* des sous-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_p$, si tout vecteur $\mathbf{x}$ de $E$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_p,$$

où, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\mathbf{x}_i \in E_i$. On note alors $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_p$.

Pour montrer que $E$ se décompose en la somme directe de $p$ espaces vectoriels :

$$E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_p,$$

il suffit de montrer que $E = E_1 + \ldots + E_p$ et que pour tout $i \in [\![2, p]\!]$, on a

$$E_i \cap (E_1 + \ldots + E_{i-1}) = \{\mathbf{0}\}.$$

En pratique, on peut aussi utiliser la caractérisation suivante. Les sous-espaces $E_1, \ldots, E_p$ sont en somme directe si, et seulement si, l'égalité

$$\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_p = \mathbf{0}, \quad \text{où} \quad \mathbf{x}_i \in E_i,$$

implique que $\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

**1.6 Proposition.—** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $E_1, \ldots, E_p$ des sous-espaces de $E$ de bases respectives $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_p$. Alors $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_p$ si, et seulement si, la réunion $\mathscr{B}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{B}_p$ est une base de $E$.

Considérons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ des nombres complexes. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et l'ensemble $i\mathbb{R}$ des nombres imaginaires purs, auquel on ajoute 0, sont deux sous-espaces vectoriel de $\mathbb{C}$. On a $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$.

**Exercice 10.—** Montrer que l'ensemble $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions réelles à valeurs réelles se décompose en la somme directe de l'ensemble des fonctions paires et de l'ensemble des fonctions impaires.

**1.7 Proposition (une formule de Grassmann).—** Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. On a

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$



On en déduit que si $E_1, \ldots, E_p$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$, alors

$$\dim(E_1 \oplus \ldots \oplus E_p) = \dim E_1 + \ldots + \dim E_p.$$

## § 4 Les applications linéaires

**1.4.1. Définition.—** Soient $E$ et $E'$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $u : E \longrightarrow E'$ est dite *linéaire* si, pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$u(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) = \lambda u(\mathbf{x}) + \mu u(\mathbf{y}).$$

Il découle de cette définition que $u(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

**1.4.2. Espace vectoriel des applications linéaires.—** On notera $\mathscr{L}(E, E')$ l'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $E'$. Si $u$ et $v$ sont deux applications linéaires de $E$ dans $E'$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire, alors les applications $u+v$ et $\lambda u$ définies, pour tout $\mathbf{x} \in E$, par

$$(u+v)(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + v(\mathbf{x}),$$
$$(\lambda u)(\mathbf{x}) = \lambda u(\mathbf{x}),$$

sont aussi des applications linéaires de $E$ dans $E'$. L'addition et la multplication par un scalaire sur l'espace vectoriel $E'$ induisent ainsi une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel sur $\mathscr{L}(E, E')$.

Une application linéaire de $E$ dans $E$ est appelée un *endomorphisme* de $E$. On notera $\mathscr{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de $E$.

Une application linéaire de $E$ dans $\mathbb{K}$ est appelée une *forme linéaire*.

Une application linéaire et bijective est appelée un *isomorphisme*. Les endomorphismes bijectifs de $E$ sont encore appelés les *automorphismes* de $E$. Les automorphismes de $E$, muni de la composition, forment un groupe, noté $\mathrm{GL}(E)$ et appelé le *groupe linéaire* de $E$.

**1.4.3. Exemples.—**

**a)** L'homothétie $h : E \longrightarrow E$, de rapport $\lambda$, définie par $h(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ est un endomorphisme de $E$.

**b)** Soit $E = \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel formé des fonctions continues de l'intervalle réel $[a,b]$ à valeurs réelles. L'application $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(f) = \int_a^b f(t)dt$$

est une forme linéaire.