6. Constructions géométriques à la règle et au compas.

Trois problèmes grecs classiques résolus au 19ème siècle :

- **La quadrature du cercle :** Étant donné un cercle, est-il possible de construire à la règle et au compas un carré de surface égale à celle du disque délimité par ce cercle ?
- **La duplication du cube :** Étant donnée l'arête d'un premier cube, est-il possible de construire à la règle et au compas l'arête d'un second cube ayant un volume égal au double du premier cube ?
- **La trisection de l'angle :** Étant donné un angle défini par deux demi-droites, est-il possible de construire à la règle et au compas les demi-droites partageant l'angle donné en trois angles égaux ?

Pour répondre à ces problèmes, on définit et étudie les notions de points, droites et cercles constructibles dans le plan euclidien.

1 Points constructibles

On note P le plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

Définition 1. Soit X une partie de P contenant au moins deux points distincts.

1. Une droite est dite *constructible en un pas* à partir de X si c'est une droite passant par deux points distincts de X.
2. Un cercle est dit *constructible en un pas* à partir de X si c'est un cercle centré en un point de X et passant par un autre point de X.
3. Un point est dit *constructible en un pas* à partir de X s'il est un point d'intersection de deux droites distinctes, de deux cercles distincts, ou d'une droite et un cercle, constructibles en un pas à partir de X.

Par la suite, on s'intéresse aux points, droites et cercles constructibles (à la règle et au compas) à partir d'un ensemble $\{O, I\}$ de deux points distincts, où O sera l'origine du plan euclidien et I le point de coordonnées $(1, 0)$.

Définition 2. On définit par récurrence sur $n \geq 0$, l'ensemble des points constructibles X_n en au plus n étapes, en posant $X_0 = \{O, I\}$ et X_{n+1} l'ensemble des points constructibles en un pas à partir de X_n pour tout $n \geq 0$.

1. On dit qu'un point est *constructible* s'il appartient à un X_n pour un entier $n \geq 0$.
2. On dit qu'une droite est *constructible* si c'est une droite passant par deux points constructibles.
3. On dit qu'un cercle droite est *constructible* si c'est un cercle centré en un point constructible et passant par un autre point constructible.

Remarque 3. Un point d'intersection de deux droites distinctes constructibles, de deux cercles distincts constructibles, ou d'une droite et un cercle constructibles est également constructible.

Exercice 4. En utilisant une règle et un compas, vérifier que :

1. Si M est constructible, son symétrique par rapport à l'origine O l'est également.
2. Si A et B sont deux points constructibles distincts, alors la médiatrice et le milieu de $[A, B]$ sont constructibles.
3. Le point $J = (0, 1)$ est constructible.

4. Si D est une droite constructible et C est un point constructible alors la perpendiculaire à D passant par C et la parallèle à D passant par C sont constructibles.
5. Si A, B et C sont trois points constructibles avec $B \neq C$, alors le cercle de centre A et de rayon BC est constructible.

2 Nombres constructibles

Définition 5. Un nombre réel x est dit *constructible* si le point $(x, 0)$ est constructible.

Exercice 6. Soit $x,\ y \in \mathbb{R}$. Montrer que x est constructible si et seulement si $(0, x)$ est constructible. Montrer que (x, y) est constructible si et seulement si x et y le sont.

Exercice 7. Montrer que tout nombre rationnel est constructible.

Exercice 8. Montrer que l'ensemble $\mathbb{E}$ des nombres réels constructibles est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Montrer que $\mathbb{E}$ est clos par racine carrée, c.à.d. si x est un nombre réel constructible strictement positif alors $\sqrt{x}$ est également constructible.

Exercice 10. Soit K un sous-corps de $\mathbb{R}$ et $L \subset \mathbb{R}$ une extension de K (c.à.d. un sous-corps de $\mathbb{R}$ contenant K). On dit que L est une extension *quadratique* de K si L a dimension 2 en tant que K-espace vectoriel. Montrer que L est une extension quadratique de K si et seulement L est engendré au-dessus de K par une racine carrée $\sqrt{d} \notin K$ d'un élément d de K (c.à.d. $L = K(\sqrt{d})$).

Exercice 11. Soit K un sous-corps de $\mathbb{R}$ et $X = K \times K$ l'ensemble des points du plan à coordonnées dans K.

1. Montrer que toute droite constructible en un pas à partir de X admet au moins une équation à coefficients dans K.
2. Montrer que tout cercle constructible en un pas à partir de X admet au moins une équation à coefficients dans K.
3. Montrer que pour tout point M constructible en un pas à partir de X, soit M est dans X, soit il existe une extension quadratique L de K telle que les coordonnées de M sont dans L.

Théorème 12 (Wantzel (1837))**.** *Un nombre réel a est constructible si et seulement s'il existe une suite croissante finie $(L_0, L_1, \ldots, L_k)$ de sous-corps de $\mathbb{R}$ telle que :*

– $L_0 = \mathbb{Q}$;
– L_{i+1} *est une extension quadratique de* L_i *pour chaque* $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ *(i.e.* $L_{i+1} = L_i(\sqrt{d_i})$ *avec* $d_i \in L_i$ *et* $\sqrt{d_i} \notin L_i$*) ;*
– $a \in L_k$.

Exercice 13. Démontrer le théorème de Wantzel.

Remarque 14. Le théorème de Wantzel montre que $\mathbb{E}$ est le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ qui est clos par racine carrée, ou autrement dit, un nombre réel a est constructible si et seulement s'il est obtenu à partir de 0 et 1 par une suite finie d'opérations successives parmi l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction d'une racine carrée.

Exercice 15. Pour L une extension d'un corps K, on note $[L : K]$ la dimension de L en tant que K-espace vectoriel.

1. Soit $K \subset L \subset M$ trois corps tel que M est de dimension finie sur K. Montrer que
$$[M : K] = [M : L] \cdot [L : K].$$
2. En déduire que si $a \in \mathbb{R}$ est un nombre constructible alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = 2^n$.

3 Nombres algébriques, nombres transcendants et impossibilité de la quadrature du cercle

On rappelle qu'un nombre réel est *algébrique* s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients rationnels. On a vu (cf. Exercice 24 Feuille 5) qu'un nombre réel a est algébrique si et seulement si $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$ est fini. En particulier par l'Exercice 15, tout nombre constructible est algébrique.

Le nombre π est irrationnel. La première démonstration de l'irrationalité de π date de 1768 et est due à Lambert (1728-1777). En exercice, faire la démonstration de l'irrationalité de π proposée dans la première épreuve du capes 2013 (sujet sur le site du jury du capes de mathématiques `http://capes-math.org/`).

Le nombre π est en fait *transcendant* (c.à.d. non algébrique). À l'aide du calcul intégral, Hermite (1822-1901) montre en 1873 la transcendance du nombre e. Lindemann (1852-1939) généralise en 1882 son raisonnement et montre en particulier que π est également transcendant.

Exercice 16. Déduire de la transcendance de π l'impossibilité de la quadrature du cercle.

4 Impossibilité de la duplication du cube

Exercice 17. 1. Vérifier que le polynôme $X^3 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

2. En utilisant l'Exercice 24 Feuille 5, en déduire la valeur de $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}]$.
3. Montrer que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible.
4. En déduire l'impossibilité de la duplication du cube.

5 Impossibilité de la trisection de l'angle

Définition 18. Un angle θ est dit *constructible* si la demi-droite d'origine O qui forme un angle θ avec la demi-droite $[OI)$ est constructible. (Remarque : on dit qu'une demi-droite est constructible si la droite correspondante l'est.)

Exercice 19. Montrer qu'un angle θ est constructible si et seulement si le point $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ est constructible si et seulement si le réel $\cos(\theta)$ est constructible.

Exercice 20. 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer la formule trigonométrique suivante :

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha).$$

2. En déduire que $\cos(\pi/9)$ est racine de $4X^3 - 3X - 1/2$.
3. Vérifier que $2\cos(\pi/9)$ est alors racine de $X^3 - 3X - 1$.
4. Montrer que $X^3 - 3X - 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
5. En déduire que $\pi/9$ n'est pas constructible et donc l'impossibilité de la trisection de l'angle $\pi/3$.

6 Nombre d'or et pentagone régulier

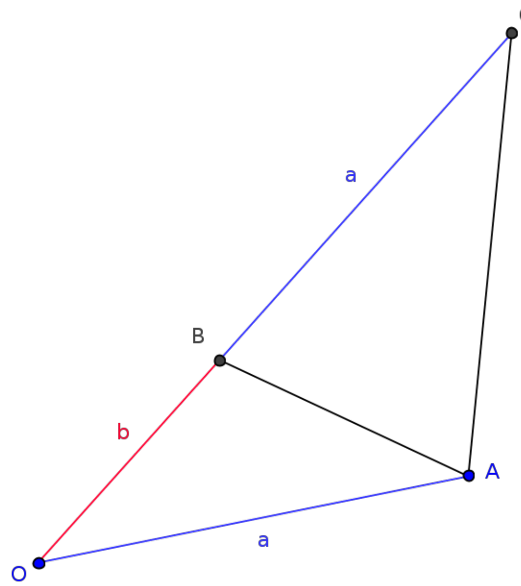
Exercice 21. Soit a et b deux nombres réels strictement positifs. On dit que a et b respectent la *proportion d'or* si
$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

1. Montrer que a et b respectent la proportion d'or si et seulement si $\frac{a}{b} = \varphi$ où φ est l'unique racine réelle positive de $X^2 - X - 1$. Le réel φ s'appelle *nombre d'or*.
2. Calculer φ.

Exercice 22 (Caractérisation géométrique du nombre d'or)**.**

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs. Soit un triangle OAB tel que $OA = a$ et $OB = b$. Soit C le point de la demi-droite $[OB)$ tel que $OC = a + b$.

1. Expliquer pourquoi les triangles OAB et OCA sont semblables si et seulement si a et b respectent la proportion d'or.
2. Supposons que a et b respectent la proportion d'or et que $AB = b$. Montrer qu'alors ACB est isocèle de sommet C et que ses angles avec la base sont le double de son angle au sommet.
3. On appelle *triangle d'or* tout triangle isocèle DEF de sommet E tel que DE et DF respectent la proportion d'or. Déduire de la question précédente, qu'un triangle isocèle est d'or si et seulement si ses angles avec la base sont le double de son angle au sommet.
4. En déduire la valeur de $\cos(2\pi/5)$ en fonction du nombre d'or φ.



Exercice 23 (Construction d'un triangle d'or)**.**

1. Dans la figure ci-contre (OI) et (OA) sont perpendiculaires, $OB = OA = OI$, le point J est le milieu de $[OI]$, $JE = JA$ et $AB = OE$. Montrer que AOB est un triangle d'or.
2. En déduire une construction à la règle et au compas du pentagone régulier.
3. Faire cette construction à l'aide du logiciel *GeoGebra* (`http://www.geogebra.org`).