Contrôle final - Vendredi 18 janvier 2013

durée : 3h

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.
Une grande importance sera accordée à la concision et à la précision de la rédaction.
Le sujet comporte deux pages. Les exercices sont indépendants.

Question de cours (3 points).

Soit A un anneau intègre et $P \in A[X]$ un polynôme de degré n strictement positif. Montrer que P a au plus n racines distinctes dans A.

Exercice 1 (4 points).

Parmi les polynômes suivants lesquels sont irréductibles ?

1. $X^8 + \sqrt{\pi}X^7 + \sqrt{15}X^4 + 19$ dans $\mathbb{R}[X]$;
2. $X^3 + 13X^2 - 7X - 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$;
3. $2X^4 + 3X^3 - 8X^2 + X + 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$;
4. $12X^5 + 10X^3 - 15X^2 + 20X - 35$ dans $\mathbb{Q}[X]$;
5. $6X^9 + 9X^7 - 18X^4 + 27X^2 + 9$ dans $\mathbb{Q}[X]$;
6. $X^8 - X^5 + X^4 - X + 1$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 2 (4 points).

1. Soit K un corps commutatif et P un polynôme dans $K[X]$. Soit D un PGCD de P et P' où P' désigne le polynôme dérivé de P.

   Soit $\alpha \in K$. Montrer que α est racine multiple de P si et seulement si α est racine de D.
2. Soit $Q = X^6 - 2X^5 + 2X + 1 \in \mathbb{R}[X]$. Calculer les racines multiples réelles de Q.

Exercice 3 (4 points).

Soit G un groupe abélien d'ordre n et $r \in \mathbb{N}$ tel que $\text{PGCD}(n, r) = 1$. On considère l'application

$$\begin{aligned} \phi : G &\to G \\ a &\mapsto a^r \end{aligned}$$

1. Montrer que ϕ est un homomorphisme.
2. Montrer que ϕ est injective. En déduire que ϕ est surjective.
3. En déduire que pour tout a dans G l'équation $x^r = a$ a une solution et que cette solution est unique.

Exercice 4 (5 points).

On note $\mathbb{D} = \left\{ \dfrac{n}{10^k} \mid \; n \in \mathbb{Z},\; k \in \mathbb{N} \right\}$ l'ensemble des décimaux.

1. Vérifier que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
2. Soit $I = \{\pm 2^i 5^j \mid \; i \in \mathbb{Z},\; j \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que I est égal à l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{D}$.
3. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{D}$, $d \neq 0$, il existe un unique couple $(d', v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que
$$d = d' \, 10^v \quad \text{et} \quad 10 \nmid d'.$$
Lorsque ces conditions sont satisfaites, on note : $\phi(d) = |d'|$. On convient que $\phi(0) = 0$.
4. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{D}$ et $b \in \mathbb{D}$ avec $b \neq 0$, il existe $q \in \mathbb{D}$ et $r \in \mathbb{D}$ tel que $a = bq + r$ et $\phi(r) < \phi(b)$.
Qu'en déduit-on sur l'anneau $\mathbb{D}$?
5. Calculer un PGCD de $2,41$ et $10,5$ dans $\mathbb{D}$.

Exercice 5 (2 points bonus).

1. Soit $\alpha \in]0, \pi[$ un angle constructible déterminé par deux demi-droites constructibles. Expliquer pourquoi $\alpha/2$ est également constructible.
2. Montrer que l'on peut découper un gâteau rond en 24 parts égales à la règle et au compas.