

---

---

# PROGRAMME TRAITÉ EN COURS DE TOPOLOGIE GÉNÉRALE

---

---

## Notes de cours

Les notes de cours de l'an dernier sont disponibles sur le wiki site de la licence de mathématiques :

<http://licence-math.univ-lyon1/doku.php?id=enseignements:automne10mi>

Toutes les informations sur le cours de *Topologie Générale* du semestre d'automne 2011 seront déposées sur le site :

<http://licence-math.univ-lyon1/doku.php>

## Programme traité lors du cours du 12 septembre

### 1. Espaces métriques

Distance. Notion d'espace métrique. Premiers exemples (droite numérique, espaces numériques). Boule ouverte. Boule fermée. Tout point d'une boule ouverte est le centre d'une autre boule ouverte contenue dans la première. Distance induite. Image réciproque d'une distance par une application injective. Distance sur la droite numérique achevée.

### 2. Espaces normés

Norme sur un espace vectoriel réel. Propriétés élémentaires de la norme. Une norme sur un espace vectoriel induit canoniquement une distance sur toute partie de cet espace vectoriel. Normes euclidienne, du sup et en moyenne d'ordre 1 (et description des boules ouvertes) sur les espaces vectoriels de dimension finie. Deux normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont toujours équivalentes. Norme uniforme et norme  $L^1$  sur l'espace des fonctions réelles continues sur un segment fermé et borné. Ces deux normes sont comparables mais pas équivalentes

### 3. Espaces préhilbertiens

Produit scalaire. Espaces préhilbertiens. Exemples. Inégalité de Cauchy Schwarz. Norme induite par le produit scalaire.

## Programme traité lors du cours du 19 septembre

### 1. Fin des espaces préhilbertiens

Cosinus de l'angle entre deux vecteurs. Orthogonalité. Relation de Pythagore. Identité de la médiane. Identité de polarisation. Espace de Hilbert des suites de carré sommable.

## 2. Espaces topologiques

Notion de topologie et d'espace topologique. Premiers exemples (topologies grossières et discrète). Voisinages d'un point. Espaces séparés. Parties fermées. Topologie associée à une structure d'espace métrique.

## Programme traité lors du cours du 26 septembre

### 1. Suite des espaces topologiques

Topologie induite. Exemples de fermés dans les espaces métriques. Intérieur, adhérence et frontière d'une partie, exemples. Complémentaire de l'intérieur et adhérence du complémentaire. Caractérisation des points de l'adhérence d'une partie, cas des espaces métriques. Parties partout denses, espaces séparables, exemples.

### 2. Distances équivalentes

Équivalence de deux distances. Caractérisation de l'équivalence par les inclusions de boules. Deux distances quasi isométriques sont équivalentes. Les distance  $d$  et  $\delta=d/1+d$  sont équivalentes, mais pas toujours quasi isométriques.

## Programme traité lors du cours du 3 octobre

### 1. Fin des distances équivalentes

Normes équivalentes. Toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes. Notion d'espace topologique métrisable.

### 2. Topologie produit

Ouverts élémentaires. Définition de la topologie produit. Produits d'espaces séparés. Cas d'un produit de deux espaces topologiques : si chaque facteur est métrisable, alors le produit l'est. Extension au cas d'un produit infini dénombrable d'espaces métrisables. La topologie produit sur le produit  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  n'est pas métrisable.

## Programme traité lors du cours du 10 octobre

### 1. Limite de suites

Définition de la limite d'une suite. Cas des espaces métriques. Limites de suites dans les espaces normés. Séries convergentes dans les espaces normés. Limite de suites dans les espaces produits. Exemples (et contre exemples) de limites dans l'espace des fonctions

**réelles continues sur un segment fermé borné de la droite réelle. Caractérisation des fermés et de l'adhérence d'une partie au moyen des suites dans un espace métrique.**

## **2. Suites de nombres réels**

**Limite d'une suite croissante majorée. Théorème de Bolzano. Critère de Cauchy pour les suites de nombres réels**

### **Prévu pour le prochain cours**

**FIN DES SUITES DE NOMBRES RÉELS.** Critères de convergence des séries de nombres réels.

**LIMITES DE FONCTIONS. CONTINUITÉ.** Définition. Cas des espaces métriques. Cas des fonctions à valeurs dans un espace produit. Notion de fonction continue. Caractérisation des fonctions continues par les images réciproques d'ouverts. Composée de fonctions continues. Fonctions continues à valeurs dans les espaces produits. Fonctions uniformément continues. Homéomorphismes.