PROGRAMME TRAITÉ EN COURS DE TOPOLOGIE GÉNÉRALE

Notes de cours

Les notes de cours de l'an dernier sont disponibles sur le wiki site de la licence de mathématiques :

http://licence-math.univ-lyon1/doku.php?id=enseignements:automne10mi

Toutes les informations sur le cours de *Topologie Générale* du semestre d'automne 2011 seront déposées sur le site :

http://licence-math.univ-lyon1/doku.php

Programme traité lors du cours du 12 septembre

1. Espaces métriques

Distance. Notion d'espace métrique. Premiers exemples (droite numérique, espaces numériques). Boule ouverte. Boule fermée. Tout point d'une boule ouverte est le centre d'une autre boule ouverte contenue dans la première. Distance induite. Image réciproque d'une distance par une application injective. Distance sur la droite numérique achevée.

2. Espaces normés

Norme sur un espace vectoriel réel. Propriétés élémentaires de la norme. Une norme sur un espace vectoriel induit canoniquement une distance sur toute partie de cet espace vectoriel. Normes euclidienne, du sup et en moyenne d'ordre 1 (et description des boules ouvertes) sur les espaces vectoriels de dimension finie. Deux normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont toujours équivalentes. Norme uniforme et norme L^1 sur l'espace des fonctions réelles continues sur un segment fermé et borné. Ces deux normes sont comparables mais pas équivalentes

3. Espaces préhilbertiens

Produit scalaire. Espaces préhilbertiens. Exemples. Inégalité de Cauchy Schwarz. Norme induite par le produit scalaire.

Programme traité lors du cours du 19 septembre

1. Fin des espaces préhilbertiens

Cosinus de l'angle entre deux vecteurs. Orthogonalité. Relation de Pythagore. Identité de la médiane. Identité de polarisation. Espace de Hilbert des suites de carré sommable.

2. Espaces topologiques

Notion de topologie et d'espace topologique. Premiers exemples (topologies grossières et discrète). Voisinages d'un point. Espaces séparés. Parties fermées. Topologie associée à une structure d'espace métrique.

Programme traité lors du cours du 26 septembre

1. Suite des espaces topologiques

Topologie induite. Exemples de fermés dans les espaces métriques. Intérieur, adhérence et frontière d'une partie, exemples. Complémentaire de l'intérieur et adhérence du complémentaire. Caractérisation des points de l'adhérence d'une partie, cas des espaces métriques. Parties partout denses, espaces séparables, exemples.

2. Distances équivalentes

Équivalence de deux distances. Caractérisation de l'équivalence par les inclusions de boules. Deux distances quasi isométriques sont équivalentes. Les distance d et δ=d/1+d sont équivalentes, mais pas toujours quasi isométriques.

Programme traité lors du cours du 3 octobre

1. Fin des distances équivalentes

Normes équivalentes. Toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes. Notion d'espace topologique métrisable.

2. Topologie produit

Ouverts élémentaires. Définition de la topologie produit. Produits d'espaces séparés. Cas d'un produit de deux espaces topologiques : si chaque facteur est métrisable, alors le produit l'est. Extension au cas d'un produit infini dénombrable d'espaces métrisables. La topologie produit sur le produit $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'est pas métrisable.

Programme traité lors du cours du 10 octobre

1. Limite de suites

Définition de la limite d'une suite. Cas des espaces métriques. Limites de suites dans les espaces normés. Séries convergentes dans les espaces normés. Limite de suites dans les espaces produits. Exemples (et contre exemples) de limites dans l'espace des fonctions

réelles continues sur un segment fermé borné de la droite réelle. Caractérisation des fermés et de l'adhérence d'une partie au moyen des suites dans un espace métrique.

2. Suites de nombres réels

Limite d'une suite croissante majorée. Théorème de Bolzano. Critère de Cauchy pour les suites de nombres réels.

Programme traité lors du cours du 17 octobre

1. Suites (fin)

Tout espace normé de dimension finie est complet. La convergence absolue d'une série entraine sa convergence. Critère de d'Alembert. Exemples de séries convergentes. Rayon de convergence d'une série entière. Détermination du rayon de convergence. Exemples. Séries alternées. Critère de convergence d'Abel. Sommation des séries trigonométriques.

2. Limites de fonctions. Continuité

Définition de la limite d'une fonction quand la variable tend vers une limite. Cas des espaces métriques. Limite d'une fonction à valeur dans un produit. Utilisation des suites pour montrer l'existence d'une limite pour une fonction entre espaces métriques. Notion de fonctions continue. Fonction continue d'un espace métrique dans un autre.

Programme traité lors du cours du 24 octobre

1. Continuité (suite)

Caractérisation des fonctions continues. Exemple de forme linéaire non continue. Composition de fonctions continues. Continuité des fonctions à valeurs dans un produit. Continuité de la restriction d'une fonction continue à un sous-espace. Continuité d'une application définie sur un produit et continuité des applications partielles. Exemple de fonction séparément continue mais pas continue. Théorèmes de stabilité : continuité de la somme, du produit de deux fonctions réelles continues, du sup et de l'inf de deux fonctions réelles continues, du module, des parties positive et négative d'une fonction réelle continue.

2. Limites uniforme de fonctions continues

Une limite uniforme de fonctions continues est continue. Exemple d'une limite simple de fonctions continues qui n'est pas continue. Séries normalement convergentes de fonctions continues. Application à la continuité de la somme d'une série entière à l'intérieur du disque de convergence.

Programme traité lors du cours du 7 novembre

1. Continuité (suite)

Homéomorphismes. L'inverse d'une fonction bijective continue n'est pas automatiquement continu (deux contre-exemples donnés). Fonctions uniformément continues. Exemple de fonction continue non uniformément continue. Fonctions Lipschitziennes. Exemples.

2. Applications linéaires continues

Caractérisation de la continuité des applications linéaires entre espaces normés. Norme d'une application linéaire continue. L'espace normé des applications linéaires continues d'un espace normé dans un autre. Dual d'un espace normé. Exemple de calcul de norme d'une forme linéaire continue sur $l^1(\mathbb{N})$. Le dual de $l^1(\mathbb{N})$ est isométriquement isomorphe à $l^\infty(\mathbb{N})$ (démonstration complète).

Programme traité lors du cours du 14 novembre

Espaces métriques complets

Suites de Cauchy dans un espace métrique. Notion d'espace complet, d'espace de Banach, d'espace de Hilbert. La droite numérique est un espace complet pour la distance usuelle ; les rationnels ne constituent pas un espace complet pour la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$. Parties fermées d'un espace complet. Produits finis d'espaces complets. L'espace de Banach des fonctions bornées sur un ensemble, à valeurs dans un espace de Banach, muni de la norme uniforme. Espace de Banach des fonctions continues sur un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace de Banach. Espaces de Banach d'opérateurs linéaires continus. Le dual d'un espace normé est un espace de Banach. Séries dans les espaces de Banach. Application à l'étude de séries trigonométriques.

Programme traité lors du cours du 21 novembre

Espaces métriques complets

L'espace $l^2(\mathbb{N})$ est complet. L'espace des fonctions réelles continues sur un intervalle fermé et borné n'est pas complet pour la norme L^2. Théorème du point fixe de Banach. Application à l'existence de solutions d'équations différentielles ordinaires. Cas des équations linéaires du second ordre à coefficients continus.

Prévu pour le prochain cours

ESPACES COMPACTS. Définition d'un espace compact. Théorème de Borel-Lebesgue. Propriétés des parties compactes d'un espace : caractère fermé, stabilité par réunions finies et intersections. Image continue d'un compact. Compacts de $\mathbb{R}^n$. Espaces métriques compacts.