CONTRÔLE CONTINU PARTIEL DE TOPOLOGIE DU 5 DÉCEMBRE
Licence L3 - Lyon 1

CORRIGÉ SUCCINT

EXERCICE 1

Question 1. On a : $x_{n+1}-x_n = \frac{x_n+1}{2} - \frac{x_{n-1}+1}{2} = \frac{x_n - x_{n-1}}{2}$, d'où $x_{n+1}-x_n = \frac{x_1-x_0}{2^n}$ et donc $x_{n+p}-x_n = (x_{n+p}-x_{n+p-1})+(x_{n+p-1}-x_{n+p-2})+\cdots$
$\cdots + (x_{n+1}-x_n) = (x_1-x_0)\left(\frac{1}{2^{n+p-1}}+\cdots+\right.$
On a donc : $|x_{n+p}-x_n| = \frac{|x_1-x_0|}{2^n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{p-1}}\right) \leq \frac{|x_1-x_0|}{2^{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. La suite $(x_n)_n$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{R}$; elle converge donc vers une limite L qui doit vérifier $L = \frac{L+1}{2}$, i.e. $L=1$. Ainsi, $x_n \to 1$ quand $n\to+\infty$. ∎

Question 2. Tout $x\in\mathbb{R}$ s'écrit $x = 2u-1$. On a donc $u = \frac{x+1}{2}$ et :
$f(x) = f(2u-1) = f(u) = f\left(\frac{x+1}{2}\right)$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a donc en considérant la suite $(x_n)_n$ de la question 1 :
$$f(x_{n+1}) = f\left(\frac{x_n+1}{2}\right) = f(x_n) = \cdots = f(x).$$
Comme $1 = \lim_{n\to+\infty} x_n$ et que f est continue, on a :
$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = f(1),$$
et f est constante. ∎

EXERCICE 2

Question 1. On a : $\|P\|\geq 0$, $\|P\|=0$ implique $c_n(P)=0$ pour tout n d'où $P=0$. On a clairement $c_n(\lambda P) = \lambda c_n(P)$ pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, d'où $\|\lambda P\| = |\lambda|\cdot\|P\|$. Enfin, puisque $c_n(P+Q) = c_n(P)+c_n(Q)$, on a $\|P+Q\| = \sum_{n\geq 0} |c_n(P+Q)| \leq \sum_{n\geq 0} |c_n(P)|+|c_n(Q)| \leq \|P\|+\|Q\|$. Ceci prouve que $P\mapsto \|P\|$ est une norme. On a :
$\|X^n\| = 1$ et $\left\|\frac{X^n}{n}\right\| = \frac{1}{n}$. ∎

Question 2. On a : $\|P_n - P_m\| = \begin{cases} 0 & \text{si } n=m \\ \|X^n - X^m\| = 2 & \text{si } m\neq n. \end{cases}$ Si la suite $(P_n)_n$ admet une limite dans E, elle est de Cauchy dans E et donc $\|P_n-P_m\|\to 0$ quand $n,m\to+\infty$, ce qui est absurde puisque $\|P_n - P_m\| = 2$ pour $n\neq m$. Donc, la suite $(P_n)_n$ n'admet pas de limite dans E. ∎

Question 3. E_n est de dimension finie ; il est donc complet et par conséquent fermé dans E. En particulier, E_{n-1} est fermé dans E donc dans E_n et $D_n = E_n \setminus E_{n-1}$ est ouvert dans E_n. Pour montrer que D_n n'est pas ouvert dans E, on montre que $E\setminus D_n$ n'est pas fermé dans E. En effet, les polynômes $P_k(X) = \frac{X^k}{k}$ appartiennent à $E\setminus D_n$ pour $k>n$ et $\|P_k\| = \frac{1}{k} \to 0$ quand $k\to+\infty$ avec $0\in D_n$. Comme $P_k \to 0 \notin E\setminus D_n$, $E\setminus D_n$ n'est pas fermé. ∎

Question 4. Comme $c_n(P) = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}$ d'après la formule de Taylor pour les polynômes, $\varphi_n : P \mapsto c_n(P)$ est clairement une forme linéaire. Elle est continue car on a :

$$|\varphi_n(P)| = |c_n(P)| \leq \|P\| \quad \text{pour tout } P \in E.$$

Cette relation montre en outre que $\|\varphi_n\| \leq 1$. Comme $\|X^n\| = 1$ et que $\varphi_n(X^n) = 1$, on a : $\|\varphi_n\| = \sup_{\|P\| \leq 1} |\varphi_n(P)| \geq 1$ et donc $\|\varphi_n\| = 1$.

Comme $\psi_n(P) = n!\, c_n(P) = n!\, \varphi_n(P)$, on en déduit que :

$$\|\psi_n\| = \|n!\, \varphi_n\| = n!\, \|\varphi_n\| = n! \quad \blacksquare$$

Question 5. Si T était continue, il existerait $C \geq 0$ tel que :

$$\|T(P)\| \leq C\|P\|, \text{ i.e. } \|P'\| \leq C\|P\|$$

pour tout $P \in E$. Or, pour $P = X^n$, on a $P' = nX^{n-1}$ et donc :

$$n = \|P'\| \leq C\|X^n\| = C,$$ ce qui est absurde pour n assez grand.

Donc, T n'est pas continue. $\blacksquare$

Question 6. Comme $\|P_n\| = \|\frac{X^n}{n!}\| = \frac{1}{n!}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|P_n\| = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots = e < +\infty.$$

Par ailleurs, $\sum_{n=0}^{N} P_n = 1 + X + \cdots + \frac{X^N}{N!}$ et comme $c_k\left(\sum_{n=0}^{N} P_n\right) = \frac{1}{k!}$ pour $N \geq k$, on a si $\sum_{n=0}^{N} P_n \xrightarrow[N \to +\infty]{} P$: $c_k(P) = \lim_{N \to +\infty} c_k\left(\sum_{n=0}^{N} P_n\right) = \frac{1}{k!}$.

Comme ceci est vrai pour tout k, $c_k(P)$ n'est pas nul dès que $k > \deg(P)$, ce qui est absurde. Il s'ensuit que la série $\sum_{n=0}^{N} P_n$ ne converge vers aucun $P \in E$. Si E était complet, la condition $\sum_{n=0}^{\infty} \|P_n\| < +\infty$ impliquerait la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} P_n$ dans E, ce qui n'est pas le cas. Donc, E n'est pas complet. $\blacksquare$