Contrôle continu partiel du 5 décembre 2011

Topologie Générale (Licence L3). Semestre d'automne 2011

La durée de l'épreuve est de 1h30. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra ; un barème sur 22 points figure à titre indicatif. On attachera du prix à la présentation et à la rédaction des solutions.

EXERCICE 1 (sur 7 points)

On considère, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = \frac{x_n+1}{2}$.

Question 1 (4 points). Montrer que l'on a, pour tout entier $n \geq 1$:

$$|x_{n+1} - x_n| = \frac{|x_n - x_{n-1}|}{2}.$$

En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy, puis qu'elle converge vers 1 lorsque $n \to +\infty$.

Question 2 (3 points). On considère maintenant une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la relation $f(2x-1) = f(x)$. Montrer que l'on a $f(x) = f(\frac{x+1}{2})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Déduire de ce qui précède que f est constante.

EXERCICE 2 (sur 15 points)

On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ de tous les polynômes à coefficients réels et à une indéterminée. Pour tout polynôme $P \in E$, on note $c_n(P)$ son $n-$ième coefficient, i.e. $P = \sum_{n\geq 0} c_n(P)X^n$.

Question 1 (2 points). Montrer que l'application $P \to \|P\| = \sum_{n\geq 0} |c_n(P)|$ définit une norme sur E. Calculer $\|P\|$ pour $P(X) = X^n$ et $P(X) = \frac{X^n}{n}$.

Question 2 (2 points). On considère la suite des polynômes $P_n(X) = X^n$ $(n = 0,1,2,\ldots)$. Calculer $\|P_n - P_m\|$ pour $n, m \geq 0$. En déduire que la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ n'admet pas de limite dans E.

Question 3 (3 points). Pour $n \geq 1$, on note E_n le sous-espace de E formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n, et D_n le sous-ensemble de E formé des polynômes de degré exactement égal à n. Montrer que E_n est fermé dans E, et que D_n est ouvert dans E_n. Montrer que D_n n'est pas ouvert dans E (INDICATION : on pourra chercher à montrer que $E \setminus D_n$ n'est pas fermé dans E en considérant la suite des polynômes $P_k(X) = \frac{X^k}{k}$ $(k = 0,1,2,\ldots)$).

Question 4 (3 points). Montrer que l'application $P \to \varphi_n(P) = c_n(P)$ est une forme linéaire continue sur E. En déduire que la forme linéaire :

$$P \to \psi_n(P) = P^{(n)}(0)$$

est continue sur E, et montrer que $\|\psi_n\| = n!$.

Question 5 (2 points). Montrer que l'endomorphisme $P \to T(P) = P' = \dfrac{dP}{dX}$ de E n'est pas continu.

Question 6 (3 points). On considère la suite $(P_n)_{n\geq 1}$ de polynômes définie par $P_0(X) = 1$ et $P_n(X) = \frac{X^n}{n!}$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que l'on a $\sum_{n=0}^{\infty} \|P_n\| < +\infty$, mais que la série $\sum_{n\geq 0} P_n$ n'est pas convergente dans E. En déduire que E n'est pas complet.

—