

---

# PROGRAMME TRAITÉ EN COURS DE MESURE ET INTÉGRATION

THIERRY FACK

---

## Notes de cours

Les notes de cours de l'an dernier seront suivies à partir du troisième cours. Elles sont disponibles sur le wiki site de la licence de mathématiques :

<http://licence-math.univ-lyon1/doku.php?id=enseignements:automne10mi>

Toutes les informations sur le cours de *Mesure et Intégration* du semestre d'automne 2011 seront déposées sur le site :

<http://licence-math.univ-lyon1/doku.php>

## Programme traité lors du cours du 12 septembre

### 1. Primitives et intégrales

Notion de primitive d'une fonction définie sur un intervalle fermé borné. Intégrale simple. Exemples. Extension de la notion de primitive. Primitive des fonctions en escalier et des fonctions réglées.

### 2. Intégrale des fonctions continues

Primitive et aire du sous-graphe. L'intégrale simple d'une fonction continue est limite des sommes de Cauchy.

### 3. Intégrale de Riemann

Définition. Propriétés élémentaires de l'intégrale de Riemann (relation de Chasles, linéarité, positivité de l'intégrale). Une fonction Riemann intégrable est bornée. Majoration de l'intégrale de Riemann au moyen de la norme uniforme de la fonction.

## Programme traité lors du cours du 19 septembre

### Fin de l'intégrale de Riemann

Limites uniformes de fonctions Riemann intégrables. Exemples de fonctions Riemann intégrables : fonctions continues, continues par morceaux, fonctions réglées). Sommes de Darboux, théorème de Darboux, critère d'intégrabilité de Riemann. Exemples d'application : les fonctions monotones sur un intervalle compact sont Riemann intégrables, le produit de deux fonctions Riemann intégrables est Riemann intégrable.

Ensemble de mesure nulle. Critère de Lebesgue pour l'intégrabilité au sens de Riemann. Exemple de fonction non Riemann intégrable, mais dont l'intégrale peut quand même être définie.

## Programme traité lors du cours du 26 septembre

### Espaces mesurables

La méthode d'intégration de Lebesgue. Intégration de la fonction de Dirichlet. Tribu sur un ensemble, espace mesurable, exemples. Tribu engendrée par une partie. Tribu engendrée par les points d'un ensemble. Tribu Borélienne. L'image réciproque d'un Borélien par une application continue est un Borélien.

## Programme traité lors du cours du 3 octobre

### 1. Fin des espaces mesurables

Notion de clan (ou algèbre). Classes monotones. Si un clan est contenu dans une classe monotone, alors la tribu engendrée par ce clan est contenue dans cette classe monotone.

### 2. Espaces mesurés

Mesure positive. Espaces mesurés, espaces  $\sigma$ -finis. Exemples de mesures positives. Propriétés générales des mesures positives.

### Prévu pour le prochain cours

**FIN DES ESPACES MESURÉS.** Évènements indépendants. Théorème de Borel-Cantelli et interprétation probabiliste. Ensembles négligeables. Complétion d'un espace mesuré. Construction du prolongement de Lebesgue.