PROGRAMME TRAITÉ EN COURS DE MESURE ET INTÉGRATION

THIERRY FACK

Notes de cours

Les notes de cours de l'an dernier seront suivies à partir du troisième cours. Elles sont disponibles sur le wiki site de la licence de mathématiques :

http://licence-math.univ-lyon1/doku.php?id=enseignements:automne10mi

Toutes les informations sur le cours de *Mesure et Intégration* du semestre d'automne 2011 seront déposées sur le site :

http://licence-math.univ-lyon1/doku.php

Programme traité lors du cours du 12 septembre

1. Primitives et intégrales

Notion de primitive d'une fonction définie sur un intervalle fermé borné. Intégrale simple. Exemples. Extension de la notion de primitive. Primitive des fonctions en escalier et des fonctions réglées.

2. Intégrale des fonctions continues

Primitive et aire du sous-graphe. L'intégrale simple d'une fonction continue est limite des sommes de Cauchy.

3. Intégrale de Riemann

Définition. Propriétés élémentaires de l'intégrale de Riemann (relation de Chasles, linéarité, positivité de l'intégrale). Une fonction Riemann intégrable est bornée. Majoration de l'intégrale de Riemann au moyen de la norme uniforme de la fonction.

Programme traité lors du cours du 19 septembre

Fin de l'intégrale de Riemann

Limites uniformes de fonctions Riemann intégrables. Exemples de fonctions Riemann intégrables : fonctions continues, continues par morceaux, fonctions réglées). Sommes de Darboux, théorème de Darboux, critère d'intégrabilité de Riemann. Exemples d'application : les fonctions monotones sur un intervalle compact sont Riemann intégrables, le produit de deux fonctions Riemann intégrables est Riemann intégrable.

Ensemble de mesure nulle. Critère de Lebesgue pour l'intégrabilité au sens de Riemann. Exemple de fonction non Riemann intégrable, mais dont l'intégrale peut quand même être définie.

Programme traité lors du cours du 26 septembre

Espaces mesurables

La méthode d'intégration de Lebesgue. Intégration de la fonction de Dirichlet. Tribu sur un ensemble, espace mesurable, exemples. Tribu engendrée par une partie. Tribu engendrée par les points d'un ensemble. Tribu Borélienne. L'image réciproque d'un Borélien par une application continue est un Borélien.

Programme traité lors du cours du 3 octobre

1. Fin des espaces mesurables

Notion de clan (ou algèbre). Classes monotones. Si un clan est contenu dans une classe monotone, alors la tribu engendrée par ce clan est contenue dans cette classe monotone.

2. Espaces mesurés

Mesure positive. Espaces mesurés, espaces σ-finis. Exemples de mesures positives. Propriétés générales des mesures positives.

Programme traité lors du cours du 10 octobre

1. Suite des espaces mesurés

Sous-additivité dénombrable d'une mesure. Événements indépendants. Théorème de Borel-Cantelli sur la loi du zéro-un. Interprétation probabiliste.

2. Construction du prolongement de Lebesgue d'une mesure

Demi-anneau. Mesure positive σ-finie sur un demi-anneau. Exemples de demi-anneaux avec mesure positive σ-finie : l'anneau des intervalles semi-ouverts sur la droite numérique, avec la mesure de Lebesgue. Anneau des pavés semi-ouverts et mesure de Lebesgue n-dimensionnelle. Anneau des cylindres sur $C([a,b],\mathbb{R})$ et mesure de Wiener sur les trajectoires du mouvement Brownien. Énoncé du théorème de prolongement de Lebesgue pour une mesure positive σ-finie sur un demi-anneau. Schéma de la démonstration (incluant la définition de la mesure extérieure et la notion de partie mesurable au sens de Lebesgue).

Programme traité lors du cours du 17 octobre

Prolongement de Lebesgue

Démonstration de l'existence du prolongement de Lebesgue d'une mesure positive sur un demi-anneau σ-fini : mesure extérieure, ensembles négligeables, ensembles mesurables au sens de Lebesgue, la mesure extérieure est une mesure positive sur la tribu des ensembles mesurables au sens de Lebesgue.

Unicité du prolongement de la mesure à la tribu engendrée par le demi-anneau.

Programme traité lors du cours du 24 octobre

Fonctions mesurables

Définition. Fonctions μ-mesurables. Fonctions Boréliennes. Caractérisation de Lebesgue. Exemples de fonctions mesurables. Les fonctions continues sont Boréliennes. Caractérisation des fonctions mesurables à valeurs dans un produit. Théorèmes de stabilité sur les fonctions mesurables : stabilité par composition, pour la somme, le produit, le module, les bornes supérieure et inférieure d'une suite de fonctions réelles mesurables, la limite simple, la somme infinie. Décomposition des fonctions réelles mesurables en différence de deux fonctions mesurables positives.

Programme traité lors du cours du 7 novembre

Fonctions mesurables

Toute fonction mesurable f est limite simple d'une suite $(e_n)_n$ de fonctions simples. En outre, si f est positive, les e_n peuvent être choisies de manière à vérifier $0 \leq e_n \leq f$ et à former une suite croissante.

Fonctions intégrables

Intégrale des fonctions simples positives. Intégrale d'une fonction μ-mesurable positive. Croissance et additivité de cette intégrale. Théorème de convergence monotone. Additivité dénombrable de l'intégrale des fonctions μ-mesurables positives.

Définition des fonctions réelles μ-intégrables. Intégrale d'une telle fonction. Exemple : toute fonction borélienne bornée nulle en dehors d'un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue.

Programme traité lors du cours du 14 novembre

Fonctions intégrables (suite)

Espace des fonctions intégrables. Linéarité et positivité de l'intégrale. Majoration fondamentale $\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu$. Intégration des fonctions à valeurs complexes. Norme en moyenne d'ordre 1. Si l'intégrale d'une fonction positive est nulle, la fonction est nulle presque partout. L'espace $L^1(X,\mu)$ des classes de fonctions $\mu-$intégrables (modulo égalité presque partout) est un espace normé. Si $\|f-f_n\|_1 \to 0$ quand $n \to +\infty$, alors $\int f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu$.

Théorème de convergence dominée de Lebesgue

Lemme de Fatou. Théorème de convergence dominée de Lebesgue. Discussion, sur des exemples, de la condition de domination. Théorème de convergence dominée pour les séries. Application à l'étude de la somme de séries trigonométriques.

Programme traité lors du cours du 21 novembre

Théorèmes de convergence (suite)

Intégrabilité de la limite p.p. d'une suite de fonctions intégrables bornée pour la norme L^1. Une fonction définie sur un intervalle ouvert non borné, dont la restriction à chaque segment compact est Riemann intégrable et dont l'intégrale est absolument convergente, est Lebesgue intégrable et son intégrale coïncide avec l'intégrale généralisée.

Intégrales dépendant d'un paramètre

Condition de continuité. Condition de différentiabilité lorsque le paramètre varie dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples d'application (calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ à partir de la détermination de $I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx$ par résolution d'une équation différentielle simple).

Convergence en moyenne d'ordre 1 et convergence presque partout

Exemple de suite de fonctions intégrables qui converge en moyenne d'ordre 1 mais pas simplement presque partout.

Prévu pour le prochain cours

FONCTIONS INTÉGRABLES (SUITE). L'espace des classes de fonctions intégrables est complet pour la norme L^1. Lien entre convergence simple presque partout et convergence en moyenne d'ordre 1. Comparaison des intégrales de Riemann et de Lebesgue.
INTÉGRATION SUR LES ESPACES PRODUITS. Construction de la mesure produit.