CONTRÔLE CONTINU PARTIEL DU 28 NOVEMBRE 2011

CORRIGÉ SUCCINT

EXERCICE 1

QUESTION 1 - La fonction f_n est continue par morceaux, donc Borélienne. Elle est bornée et nulle en dehors de $[0,n]$; elle est donc Lebesgue-intégrable. ∎

QUESTION 2. $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} = e^{n\log(1+\frac{x}{n})} e^{-2x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x e^{-2x} = e^{-x}$ ∎

QUESTION 3 $(1+x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, donc l'inégalité est vraie pour $n=1$.
Supposons qu'elle soit vraie à l'ordre $n-1$. Posons $\varphi(x) = e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.
On a : $\varphi'(x) = e^x - \frac{n}{n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} = e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} \geq e^x - \left(1+\frac{x}{n-1}\right)^{n-1} \geq 0$ par hypothèse de récurrence. Donc φ est croissante, et comme $\varphi(0)=0$, on a : $\varphi(x) \geq 0$ quel que soit $x \geq 0$, d'où $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$. ∎

QUESTION 4. D'après la question 2, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-x}$. En outre :

$$|f_n(x)| \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \leq e^x e^{-2x} = e^{-x}.$$

Comme la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est Lebesgue intégrable sur $[0,+\infty[$, on a $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$ en vertu du théorème de convergence dominée de Lebesgue. Il s'ensuit que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx = 1$. ∎

EXERCICE 2

QUESTION 1. Si $x \in B$, alors il existe pour tout $n \geq 1$ un entier $k \geq n$ tel que $x \in B_k$, d'où $B \subset \bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} B_k\right)$. Inversement, si $x \in \bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} B_k\right)$, il existe pour tout $n \geq 1$ un entier $k \geq n$ tel que $x \in B_k$, et donc x appartient à une infinité de B_k. On a donc

$$B = \bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} B_k\right)$$

et comme $\mathcal{B}$ est une tribu, on a $B \in \mathcal{B}$. ∎

QUESTION 2. Comme les $C_n = \bigcup_{k\geq n} B_k$ forment une suite décroissante de Boréliens tels que $\lambda(C_1) \leq \lambda([0,1]) = 1 < +\infty$, on a :

$$\lambda(B) = \lim_{n\to+\infty} \lambda(C_n).$$

Or $\lambda(C_n) = \lambda\left(\bigcup_{k\geq n} B_k\right) \leq \sum_{k\geq n} \lambda(B_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (car $\sum_{n\geq 1} \lambda(B_n) < +\infty$

on a $\lambda(B) = 0$. ■

QUESTION 3

Comme f est λ-intégrable, elle est mesurable, et puisque la tribu est celle des Boréliens, elle est Borélienne. Mais alors

$$B_k = f^{-1}([t_k, t_{k+1}[) \in \mathcal{B}$$

car $[t_k, t_{k+1}[$ est un Borélien de $\mathbb{R}$. Les B_k sont deux à deux disjoints et de réunion $X = [0,1]$. On a donc :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda(B_k) = \lambda(X) = 1$$

Enfin, si $x \in B_k$, on a : $t_k \leq f(x) < t_{k+1}$, d'où

$$t_k \mathbb{1}_{B_k} \leq f \mathbb{1}_{B_k} \leq t_{k+1} \mathbb{1}_{B_k}.$$

En intégrant cette inégalité, on obtient :

$$t_k \lambda(B_k) \leq \int_{B_k} f \, d\lambda \leq t_{k+1} \lambda(B_k).$$ ■

QUESTION 4. Pour $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$, on a :

$$\xi_k \lambda(B_k) \in [t_k \lambda(B_k), t_{k+1} \lambda(B_k)].$$

D'après la question 3, on a :

$$\int_{B_k} f \, d\lambda \in [t_k \lambda(B_k), t_{k+1} \lambda(B_k)].$$

On a donc : $$\left| \xi_k \lambda(B_k) - \int_{B_k} f \, d\lambda \right| \leq (t_{k+1} - t_k) \lambda(B_k) \leq \delta(\sigma) \lambda(B_k).$$

On en déduit que :

$$|\xi_k \lambda(B_k)| \leq \delta(\sigma) \lambda(B_k) + \left| \int_{B_k} f \, d\lambda \right| \leq \delta(\sigma) \lambda(B_k) + \int_{B_k} |f| \, d\lambda.$$

Comme $\sum_{k \geq 1} \lambda(B_k) = 1$ et que $\sum_{k \geq 1} \int_{B_k} |f| \, d\lambda = \int_X |f| \, d\lambda$ (en vertu du théorème de convergence monotone), la série $\sum_k \xi_k \lambda(B_k)$ est absolument convergente, donc convergente. ■

QUESTION 5. D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a :

$\int_0^1 f \, d\lambda = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{B_k} f \, d\lambda$; d'où $\left| \int_0^1 f \, d\lambda - S(f, \sigma, \xi) \right| = \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{B_k} f \, d\lambda - \xi_k \lambda(B_k) \right|$

$\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{B_k} f \, d\lambda - \xi_k \lambda(B_k) \right| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(\sigma) \lambda(B_k) = \delta(\sigma) \lambda([0,1]) = \delta(\sigma)$. Il s'ensuit que $\int_0^1 f \, d\lambda = \lim_{\delta(\sigma) \to 0} S(f, \sigma, \xi)$, d'où le résultat. ■