Contrôle continu partiel du 28 novembre 2011

Mesure et Intégration (Licence L3). Semestre d'automne 2011

La durée de l'épreuve est de 1h30. Les deux exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra ; un barème sur 21 points figure à titre indicatif. On attachera du prix à la présentation et à la rédaction des solutions.

EXERCICE 1 (sur 8 points)

Question 1 (1 point). Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \geq 0$, on pose :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} & si\ 0 \leq x \leq n \\ 0 & si\ x > n \end{cases}$$

Montrer que la fonction f_n est Lebesgue intégrable sur $[0,+\infty[$.

Question 2 (2 points). Calculer, pour tout réel $x \geq 0$, la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$.

Question 3 (2 points). Montrer que l'on a : $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$ pour tout réel $x \geq 0$ et tout entier $n \geq 1$.

Question 4 (3 points). Déduire de ce qui précède que l'on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx = 1.$$

EXERCICE 2 (sur 13 points)

NOTATIONS. On considère l'espace mesuré $(X, \mathcal{B}, \lambda)$, où $X = [0,1]$, $\mathcal{B}$ est la tribu des Boréliens de $[0,1]$, et λ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. On désigne par $(B_1, B_2, \ldots)$ une suite infinie de parties Boréliennes de X, et on note B l'ensemble des $x \in [0,1]$ qui appartiennent à une infinité de B_n. Enfin, on appelle subdivision de $\mathbb{R}$ une suite $\sigma = (t_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ qui vérifie :

(i) $t_k < t_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $\delta(\sigma) = \sup\limits_{k \in \mathbb{Z}} |t_{k+1} - t_k| < +\infty$;

(ii) $\lim\limits_{k \to +\infty} t_k = +\infty$ et $\lim\limits_{k \to -\infty} t_k = -\infty$.

Question 1 (2 points). Montrer que B est un Borélien de $[0,1]$ (INDICATION : on pourra remarquer que $B = \bigcap\limits_{n \geq 1} \left(\bigcup\limits_{k \geq n} B_k \right)$).

Question 2 (3 points). On suppose que $\sum\limits_{n \geq 1} \lambda(B_n) < +\infty$. Montrer que l'ensemble B est $\lambda-$négligeable.

Dans ce qui suit, on désigne par $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction λ-intégrable sur X.

Question 3 (3 points). Soit $\sigma=(t_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une subdivision de $\mathbb{R}$ et posons, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $B_k=\{x\in[0,1] \mid t_k\le f(x)<t_{k+1}\}$. Montrer que B_k est un Borélien de $[0,1]$ et que l'on a :

(i) $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\lambda(B_k)=1$,

(ii) $t_k\lambda(B_k)\le\int_{B_k} fd\lambda\le t_{k+1}\lambda(B_k)$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$.

Question 4 (3 points). Choisissons, pour toute subdivision $\sigma=(t_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{R}$ et tout $k\in\mathbb{Z}$, un point $\xi_k\in[t_k,t_{k+1}]$. Montrer que l'on a, pour tout $k\in\mathbb{Z}$:

$$|\xi_k\lambda(B_k)|\le\delta(\sigma)\lambda(B_k)+\int_{B_k}|f|\,d\lambda.$$

En déduire la convergence de la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\xi_k\lambda(\{x\in[0,1] \mid t_k\le f(x)<t_{k+1}\})$.

Question 5 (2 points). On pose $S(f,\sigma,\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\xi_k\lambda(\{x\in[0,1] \mid t_k\le f(x)<t_{k+1}\})$.

Montrer que l'on a $\left|\int_0^1 fd\lambda-S(f,\sigma,\xi)\right|\le\delta(\sigma)$; en déduire que :

$$\int_0^1 fd\lambda=\lim_{\delta(\sigma)\to 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\xi_k\lambda(\{x\in[0,1] \mid t_k\le f(x)<t_{k+1}\}).$$

—