**Université Claude Bernard - Lyon 1**
Licence "Mathématiques générales et applications"
UE Algèbre I - Structures fondamentales
Semestre automne 2014-2015

# TD n°2

**Exercice 1.** On considère les ensembles

$$E = \left\{ x \in [0,1],\, \exists n \in \mathbb{N},\, x < \frac{1}{n+1} \right\} \text{ et } F = \left\{ x \in [0,1],\, \forall n \in \mathbb{N},\, x < \frac{1}{n+1} \right\}.$$

Les ensembles $E$ et $F$ ont-ils un, une infinité ou aucun élément ?

**Exercice 2.** Soient $A$ et $B$ deux parties de $\mathbb{N}$. Écrire en utilisant $\forall, \exists, \in$ les assertions

1. $A = \emptyset$ ;
2. $A \cap B \neq \emptyset$ ;
3. $A \subset B$ ;
4. $A \not\subset B$.

**Exercice 3.** Soient $A = [1,3], B = ]2,4], C = [1,2[$. Déterminer

1. $A \cap B$ ;
2. $A \cup B$ ;
3. $B \cap C$ ;
4. $B \cup C$.

**Exercice 4.**

1. Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des parties suivantes :
   $A_1 = ]-\infty, 0]$, $A_2 = ]-\infty, 0[$, $A_3 = ]0, +\infty[$, $A_4 = [0, +\infty[$, $A_5 = ]1,2[$ et $A_6 = [1,2[$.
2. Soient $A = ]-\infty, 1[ \cup [2, +\infty[$, $B = ]-\infty, 1[$ et $C = [2, +\infty[$. Comparer les ensembles suivants : $A^c$ et $B^c \cap C^c$.

**Exercice 5.** Soient $P_1$, $P_2$, $P_3$ et $P_4$ les parties du plan $\mathbb{R}^2$ définies par

$$P_1 = \{(x,y), x + y \leq 1\} \qquad P_2 = \{(x,y), x - y \leq 1\}$$
$$P_3 = \{(x,y), -x + y \leq 1\} \quad P_4 = \{(x,y), -x - y \leq 1\}.$$

1. Represénter $P_1 \cap P_2$, $P_3 \cap P_4$ et $(P_1 \cap P_2) \cap (P_3 \cap P_4)$ dans le plan $\mathbb{R}^2$.
2. Comparer $(P_1 \cap P_2)^c$, $P_1^c \cap P_2^c$, $(P_1 \cup P_2)^c$ et $P_1^c \cup P_2^c$.

**Exercice 6.** Soient $A, B, C$ trois parties d'un ensemble $E$.

1. Que pensez-vous de l'implication
$$(A \cup B) \not\subset C \Rightarrow (A \not\subset C \,\text{ou}\, B \not\subset C)?$$
2. On suppose qu'on a les deux inclusions suivantes $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer l'inclusion $B \subset C$.

**Exercice 7.** Soit $E$ un ensemble et $F$ et $G$ deux parties de $E$. Montrer que

1. $F \subset G \Longleftrightarrow F \cup G = G$
2. $F \subset G \Longleftrightarrow F \cap C_E G = \emptyset$

**Exercice 8.** On considère les ensembles $E = \{1, 5\}$, $F = \{2, 3\}$ et $G = \{1, 4\}$. Donner en extension les ensembles suivants :

1. $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}(E \cap G)$, $\mathcal{P}(F \cap G)$, $\mathcal{P}(E \cup G)$
2. $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$, $\mathcal{P}(F \times (E \cap G))$
3. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$

**Exercice 9.** Soient $X$ et $Y$ des ensembles. Démontrer que

$$\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(Y) \Leftrightarrow X = Y.$$

**Exercice 10.** 1. Dénombrer les couples d'entiers $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que

2. $n + m = 7$
3. $n + m \leq 7$
4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les couples d'entiers $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que $n + m = k$.

**Exercice 11.** Soient $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$.

1. Combien y a-t-il de listes strictement croissantes de $m$ entiers parmi $1, 2, \ldots, n$ ?
2. En dénombrant les listes strictement croissantes de $m + 1$ entiers parmi $1, \ldots, n + 1$, dont le dernier terme vaut successivement $m + 1, m + 2, \ldots, n + 1$, montrer sans calcul que

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \cdots + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$