Université Claude Bernard Lyon 1
Licence « Sciences et technologie »
Unité d'enseignement Math I Algèbre

CONTRÔLE FINAL

9 janvier 2015 — durée 2 h

Corrigé

Question 1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Solution. Par récurrence sur $n \geq 1$. Initialisation : Pour $n = 1$ on a

$$\sum_{k=1}^{1} (-1)^k k^2 = (-1)^1 1^2 = -1 = (-1)^1 \frac{1\,(1+1)}{2}.$$

Hérédité : Supposons l'énoncé vrai pour n. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^2 &= \Big(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2\Big) + (-1)^{n+1}(n+1)^2 = (-1)^n \frac{n\,(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\ &= (-1)^{n+1} \frac{2(n+1)^2 - n\,(n+1)}{2} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

L'énoncé est donc vrai pour tout entier $n \geq 1$.

Question 2.

1. Calculer le pgcd de 224 et 119.
2. Donner $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $224u + 119v = \operatorname{pgcd}(224, 119)$.
3. Déterminer l'ensemble des solutions pour $x \in \mathbb{Z}$ du système

$$x \equiv 3 \mod 224 \quad \text{et} \quad x \equiv 17 \mod 119.$$

Solution.

1. $$\begin{aligned} 224 &= 119 + 105 \\ 119 &= 105 + 14 \\ 105 &= 7 \cdot 14 + 7 \\ 14 &= 2 \cdot 7. \end{aligned}$$

   On a donc $\operatorname{pgcd}(224, 119) = 7$.

2. $$\begin{aligned} 7 &= 105 - 7 \cdot 14 \\ &= 105 - 7 \cdot (119 - 105) = 8 \cdot 105 - 7 \cdot 119 \\ &= 8 \cdot (224 - 119) - 7 \cdot 119 = 8 \cdot 224 - 15 \cdot 119. \end{aligned}$$

   Ainsi on peut prendre $(u, v) = (8, -15)$.

3. On a $17 - 3 \equiv 0 \mod 7$. Il y a donc une solution.
   D'après la partie 2. on a
$$1 = \frac{7}{7} = 8 \cdot \frac{224}{7} - 15 \cdot \frac{119}{7} = 8 \cdot 32 - 15 \cdot 17.$$
   On pose $x_0 = 17 \cdot 8 \cdot 32 - 3 \cdot 15 \cdot 17 = 17 \cdot (256 - 45) = 17 \cdot 211$. Alors
$$x_0 = 17\,(8 \cdot 32 - 15 \cdot 17) + (17 - 3) \cdot 15 \cdot 17 = 17 + 2 \cdot 15 \cdot 119 \equiv 17 \mod 119$$
   et
$$x_0 = (17 - 3) \cdot 8 \cdot 32 + 3\,(8 \cdot 32 - 15 \cdot 17) = 2 \cdot 8 \cdot 224 \equiv 3 \mod 224.$$
   On a donc trouve une solution particulière x_0. Si x est une autre solution, alors $x - x_0 \equiv 0 \mod 224$ et $x - x_0 \equiv 0 \mod 119$. Ainsi
$$x - x_0 \equiv 0 \mod \mathrm{ppcm}(224, 119) = \frac{224 \cdot 119}{\mathrm{pgcd}(224, 119)} = \frac{224 \cdot 119}{7} = 224 \cdot 17,$$
   et $x - x_0 = 224 \cdot 17 \cdot n\mathbb{Z}$. Réciproquement, si $x - x_0 \equiv 0 \mod \mathrm{ppcm}(224, 119)$, alors $x \equiv x_0 \equiv 3 \mod 224$ et $x \equiv x_0 =\equiv 17 \mod 119$. L'ensemble des solutions est donc
$$\{x_0 + 224 \cdot 17 \cdot n : n \in \mathbb{Z}\} = \{17 \cdot (211 + 224n) : n \in \mathbb{Z}\} = \{3587 + 3808n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Question 3.

1. Déterminer les racines carrées de $15 + 8i$ sous forme algébrique.
2. Résoudre, pour $z \in \mathbb{C}$, l'équation $z^2 + (1 - 2i)z - \frac{9}{2} - 3i = 0$.

[Indication : $15^2 = 225$, $16^2 = 256$, $17^2 = 289$, $18^2 = 324$ et $19^2 = 361$.]

Solution

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $(x + iy)^2 = 15 + 8i$. Alors
$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 15, \\ 2xy &= 8, \quad \text{et} \\ x^2 + y^2 &= |x + iy|^2 = |15 + 8i| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17. \end{aligned}$$
   Ainsi $x^2 = \frac{1}{2}\,(15 + 17) = 16$ et $x = \pm 4$. Alors $y = \frac{8}{2x} = \pm 1$. Les racines carrées de $15 + 8i$ sont $\pm(4 + i)$.
2. Le discriminant est $\Delta = (1 - 2i)^2 - 4\,(-\frac{9}{2} - 3i) = -3 - 4i + 18 + 12i = 15 + 8i$. Si $\delta^2 = \Delta$, les solutions de l'équation sont $z = \frac{1}{2}\,(-(1 - 2i) \pm \delta)$. On a donc les deux solutions
$$z_1 = \frac{-1 + 2i + 4 + i}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1 + 2i - 4 - i}{2} = -\frac{5}{2} + \frac{i}{2}.$$

Question 4. Montrer que pour tous couple de réels (α, β) on a
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{et} \quad \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Solution On a
$$\begin{aligned} 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2} + i\,2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2} &= 2\cos\frac{\alpha - \beta}{2}\,(\cos\frac{\alpha + \beta}{2} + i\sin\frac{\alpha + \beta}{2}) \\ &= (e^{i\frac{\alpha - \beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha - \beta}{2}})e^{i\frac{\alpha + \beta}{2}} = e^{i\alpha} + e^{i\beta} \\ &= (\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos\beta + i\sin\beta). \end{aligned}$$

L'énoncé en découle en identifiant partie réelle et imaginaire.

Question 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x,y) = (2x - y, \frac{1}{2}y - x)$.

1. Montrer que f est une application linéaire, et donner la matrice associée en base canonique.
2. Calculer le déterminant de f. L'application f, est-elle bijective ?
3. Soit $I = \{f(\vec{v}) : \vec{v} \in \mathbb{R}^2\}$ l'image de f. Montrer que I est la droite vectorielle dirigée par $\vec{u}_1 = f(1,0)$.
4. Soit $K = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 : \ f(\vec{v}) = 0\}$ le noyau de f. Montrer que K est une droite vectorielle et en donner un vecteur directeur $\vec{u}_2$.
5. Montrer que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.
6. Calculer $f(\vec{u}_1)$ et $f(\vec{u}_2)$ en base canonique, puis en base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$. En déduire la matrice de f en base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

Solution.

1. Soient $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f((x,y) + \lambda(x',y')) &= f(x + \lambda x', y + \lambda y') = \big(2(x+\lambda x') - (y + \lambda y'), \tfrac{1}{2}(y+\lambda y') - (x + \lambda y')\big) \\ &= (2x - y, \tfrac{1}{2}y - x) + \lambda\,(2x' - y', \tfrac{1}{2}y' - x') = f(x,y) + \lambda\, f(x', y'). \end{aligned}$$

Donc f est une application linéaire. Sa matrice en base canonique est

$$\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2. $$\det f = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 2\,\frac{1}{2} - (-1)\,(-1) = 0.$$

Donc f n'est pas bijective.

3. Soit $\vec{u}_1 = f(1,0) = (2,-1)$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$f(x,y) = (2x - y, \tfrac{1}{2}y - x) = (x - \tfrac{1}{2}y)\,(2,-1) = (x - \tfrac{1}{2}y)\,\vec{u}_1.$$

Or, $x - \frac{1}{2}y \in \mathbb{R}$ et y prend toutes les valeurs (par exemple pour $y = 0$ quand x parcourt $\mathbb{R}$). Donc $I = \operatorname{im}(f) = \mathbb{R}\,\vec{u}_1$ est la droite vectorielle dirigée par $\vec{u}_1$.

4. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $(x,y) \in \ker(f) = K$ si et seulement si

$$2x - y = 0 \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}y - x = 0.$$

Les deux conditions sont équivalentes à $y = 2x$, c'est-à-dire $(x,y) = x\,\vec{u}_2$ avec $\vec{u}_2 = (1,2)$. Donc K est la droite vectorielle dirigée par $\vec{u}_2 = (1,2)$.

5. $$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) = 5 \neq 0.$$

Donc $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires et forment une base de $\mathbb{R}^2$.

6. On a $f(\vec{u}_1) = f(2,-1) = (5, -\frac{5}{2}) = \frac{5}{2}\,\vec{u}_1$, et $f(\vec{u}_2) = (0,0)$ comme $\vec{u}_2 \in K$. La matrice de f en base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est donc

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$