Université Claude Bernard - Lyon 1
Licence "Mathématiques générales et applications"
UE Algèbre I - Structures fondamentales
Semestre automne 2014-2015

Feuille d'exercices n°6

Exercice 1. Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - y, x + y)$ et $(\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer la matrice A de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f.
4. En déduire que f est inversible.
5. Déterminer f^{-1} dans la base canonique et en déduire A^{-1}.
6. Soient $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
7. Calculer $f(\vec{u}), f(\vec{v})$ et en déduire la matrice de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire injective et $(\vec{u}, \vec{v})$ une base de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $(f(\vec{u}), f(\vec{v}))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. En déduire que f est surjective.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire. On rappelle que le noyau de f est l'ensemble $\ker(f) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2,\ f(\vec{x}) = \vec{0}\}$.

1. Montrer que pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in \ker(f)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\vec{x} + \vec{y} \in \ker(f)$ et $\lambda\vec{x} \in \ker(f)$.
2. Montrer que $\vec{0} \in \ker(f)$.
3. Montrer que f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{\vec{0}\}$.

Exercice 4. Soit A la matrice définie par $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.
3. Soit $B \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice. Montrer que l'on a $AB = BA$ si et seulement s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Soient $\vec{u} = (1, 1)$ et $\vec{v} = (-1, 1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base.
2. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Calculer les images par f des droites D_1 et D_2 de $\mathbb{R}^2$ d'equations respectives $y = x$ et $y = -x$.
4. En déduire la nature de f.

Exercice 6. Soient D_1 la droite de $\mathbb{R}^2$ déquation $2x - y = 0$ et D_2 la droite de $\mathbb{R}^2$ déquation $x + 4y = 0$.

1. Trouver une base $(\vec{u}, \vec{v})$ tel que la matrice de la symétrie s sur D_1 parallèlement à D_2 soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Soit D la droite de $\mathbb{R}^2$ déquation $8x - 5y = 0$. Calculer $p(D)$.

Exercice 7. Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soient f et h deux applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base canonique sont données respectivement par

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Donner les images par f et h d'un vecteur de coordonnées (x, y) dans la base canonique.
2. Donner la matrice de h^{-1} dans la base canonique. Identifier la transformation h^{-1}.
3. Donner la matrice de l'application $r = f \circ h^{-1}$ dans la base canonique. Calculer $r(\vec{i}), r(\vec{j})$ et identifier la transformation r.
4. En déduire la nature de la transformation f.