Université Claude Bernard - Lyon 1
Licence “Mathématiques générales et applications”
UE Algèbre I - Structures fondamentales
Semestre automne 2014-2015

Feuille d’exercices n°1

Exercice 1. Récrire avec uniquement des symboles les phrases suivantes. Déterminer si elles sont vraies ou fausses :

1. Il existe un entier positif qui est pair.
2. Chaque nombre réel est inférieur à un entier.
3. Quels que soient les nombres réels strictement positifs x et y, il existe un entier positif n satisfaisant $nx > y$.
4. Quel que soit le nombre réel strictement positif x, il existe un entier positif n tel que $\frac{1}{n} < x$.
5. Quel que soit le nombre réel strictement positif x, il existe un entier positif n tel que $\frac{1}{n} < x^n$.

Exercice 2. L’expression $\exists! x \in A \ P(X)$ se traduit en français par la phrase : il existe un unique élément x de A qui satisfait la condition $P(x)$. On peut aussi l’écrire sous la forme

$$(\exists x \in A \ P(x)) \,\text{et}\, (\forall x_1, x_2 \in A \ [P(x_1) \qquad \text{et} \qquad P(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]).$$

1. Les propositions sont-elles vraies ou fausses ? écrire leur négation.
   (a) $\exists! x \in \mathbb{R} \ x^2 = 4$
   (b) $\exists! x \in \mathbb{R} \ x + 3 = 5$
2. Trouvez la négation de la proposition

$$\exists! x \in \mathbb{R} \ x^2 = 4 \qquad \text{et} \exists! x \in \mathbb{R} \ x + 3 = 5.$$

Exercice 3. On considère la fonction $f : [-4; 4] \to \mathbb{R}$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	-4		-1		4
			2		
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	
	-5				-2

En exploitant les informations données, justifiez pour chacune des propositions si elle est vraie ou fausse.

1. Il existe un nombre de $[-4; 4]$ qui a une image strictement négative par f.
2. Tous les nombres de $[-4; 4]$ ont une image strictement négative par f.
3. Tous les nombres de $[-4; 4]$ ont une image strictement inférieure à 3 par f.
4. Il existe un nombre de $[-4; 4]$ qui a une image supérieure à 3 par f.

Exercice 4. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l’entier $4^n + 2$ est divisible par 3.

Exercice 5. Soit $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$(1 + a)^n \geq 1 + an.$$

Exercice 6. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Exercice 7.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$,

$$1 + x + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

2. Trouver une autre démonstration directe (et courte) de ce résultat.

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

1. Calculer $u_1 - u_0$, $u_2 - u_1$, $u_3 - u_2$, $u_4 - u_3$, $u_5 - u_4$.
2. Conjecturer une écriture pour u_n en fonction de n (pensez à une suite géométrique).
3. Démontrer par récurrence cette conjecture