7. Anneaux factoriels. Idéaux.

Exercice 1 Dire si les éléménts donnés sont irréductibles dans l'anneau indiqué :

1. 5 dans $\mathbb{Z}$
2. -17 dans $\mathbb{Z}$
3. 14 dans $\mathbb{Z}$
4. 2X-3 dans $\mathbb{Z}[X]$
5. 2X-10 dans $\mathbb{Z}[X]$
6. 2X-3 dans $\mathbb{Q}[X]$
7. 2X-10 dans $\mathbb{Q}[X]$
8. 2X-10 dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}[X]$

Exercice 2 Factoriser $4X^2 - 4X + 8$ en produit d'irréductibles en le considérant comme un élément de $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$ et $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 3 Soient $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$. On note $c(P)$ le contenu de P. Montrer que $c(PQ) = c(P)c(Q)$.

Exercice 4 Soit A un anneau intègre vérifiant la propriété d'existence de la décomposition en irréductibles. Montrer l'équivalence entre :

1. A vérifie le lemme de Gauss
2. A vérifie le lemme d'Euclide
3. A vérifie la propriété d'unicité de la décomposition en irréductibles

Définition. Soit A un anneau et $(I, +)$ un sous-groupe additif de $(A, +)$. On dit que I est un **idéal** de A si pour tout $a \in A$, on a $aI \subset I$ et $Ia \subset I$.

Exercice 5 Soit A un anneau commutatif.

1. Soit I un idéal de A tel que I contient un élément inversible de A. Montrer que $I = A$.
2. Quels sont les idéaux d'un coprs ?
3. Soit $a \in A$ et supposons A commutatif. Montrer que $I_a = \{x \in A,\ ax = 0\}$ est un idéal de A.
4. Un élément $a \in A$ est **nilpotent** s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0$. Montrer que l'ensemble des éléments nilpotents de A est un idéal.

Exercice 6 Soit A un anneau et I, J des idéaux de A.

1. On définit la somme de I et J par
$$I + J = \{a + b,\ a \in I, b \in J\}.$$
Montrer que $I + J$ est un idéal. Montrer que $I \subset I + J$ et $J \subset I + J$.
2. On définit le produit de I et J par
$$IJ = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i b_i,\ a_i \in I, b_i \in J \right\}.$$
Montrer que IJ est un idéal. Montrer que $IJ \subset I \cap J$.

Exercice 7

1. Soit A un anneau commutatif et $a \in A$. Montrer que l'ensemble $\{ar, r \in A\}$ est un idéal de A. C'est **l'idéal principal engendré** par a et on le note $\langle a \rangle$.
2. Soit K un corps. Montrer que l'ensemble des polynômes de $K[X]$ qui ont comme coefficient constant $a_0 = 0$ est l'idéal $\langle X \rangle$.

Définition. Un idéal I d'un anneau A est principal s'il existe $a \in A$ tel que $I = \langle a \rangle$. Si tous les idéaux de A sont principaux, on dit que A est un anneau principal.

Exercice 8 Soit K un corps et I un idéal de $K[X]$.

1. Soit $f \in I$ de degré minimal. Si $deg(f) = 0$, montrer que $I = K[X]$ et donc principal.
2. Si $\deg(f) > 0$ montrer que pour tout $g \in I$, f divise g. En déduire que $K[X]$ est un anneau principal.

Exercice 9 Soit A un anneau euclidien. Montrer que A est principal.

Définition. Soit A un anneau principal. On dit que A vérifie la **condition de chaîne ascendante** si toute chaîne d'idéaux de la forme $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ est stationnaire, c'est à dire $\exists r \in \mathbb{N}$ tel que $I_n = I_r$, $\forall n \geq r$.

Exercice 10 On considère A un anneau principal.

1. Soit $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ une chaîne ascendante d'idéaux de A. On pose $I = \bigcup_i I_i$. Montrer que I est un idéal de A.
2. Soit $c \in A$ tel que $I = \langle c \rangle$. Montrer qu'il existe I_r tel que $c \in I_r$ et donc $N = N_r$.
3. En déduire que A vérifie la condition de chaîne ascendante.
4. Soit $a \in A$ non nul et non inversible. Si a n'est pas irréductible, on écrit $a = a_1 b_1$ où a_1 et b_1 ne sont pas inversibles. Montrer que $\langle a \rangle \subseteq \langle a_1 \rangle$. En continuant cette construction et en utilisant la condition de chaîne ascendante montrer que a a un facteur irréductible.
5. En déduire que a a une décomposition en irréductibles.