4. Groupes : sous-groupes distingués, quotients

Rappel : Sous-groupe normal (ou distingué)
On dit qu'un sous-groupe $H \subset G$ est normal (ou distingué) si pour tout $x \in G$ on a $xH = Hx$.

Exercice 4.1 On considère le sous-groupe H de S_5 engendré par (12) et (13).

1. Le sous-groupe H est-il distingué dans S_5 ?
2. Déterminer le nombre de classes à droite modulo H.

Exercice 4.2 Montrer qu'un sous-groupe $H \subset G$ d'indice 2 est toujours distingué.

Rappel : Soit $\phi : G \to G'$ un homomorphisme de groupe. Alors $\ker \phi$ est distingué.

Exercice 4.3 Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer de même que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4.4 Soit $\phi : G \to G'$ un homomorphisme de groupe.

1. Soit H' un sous-groupe distingué de G'. Montrer que $\phi^{-1}(H')$ est distingué dans G.
2. Supposons que ϕ est surjective. Soit H un sous-groupe distingué de G. Montrer que $\phi(H)$ est distingué dans G'.

Rappel : Quotient
Si H est un sous-groupe distingué de G, l'ensemble des classes (à droite ou à gauche) de G modulo H forme un groupe G/H appelé groupe quotient de G par H.

Passage au quotient (Noëther)
Si $f : G \to G'$ est un morphisme de groupe, il existe un unique morphisme injectif $\bar{f} : G/Ker(\varphi) \to G'$ tel que $f(x) = \bar{f}(\bar{x})$.

Exercice 4.5

1. Montrer que le cercle unité $U \in \mathbb{C}$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.
2. Montrer que le groupe $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$ est isomorphe à $(U, .)$.
3. Montrer que la loi . sur $\mathbb{R}$ n'induit pas une loi sur le quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Exercice 4.6 On rappelle (ou on admet) que A_n désigne le sous-groupe de S_n constitué des permutations de signature 1 et que ce sous-groupe est engendré par les 3-cycles.

Soit H un sous-groupe normal de A_5.

1. Montrer que si H contient un 3-cycle alors $H = A_5$.
2. Montrer que si H contient σ produit de deux transpositions à supports disjoints, alors il existe un 3-cycle $\gamma \in A_5$ tel que $\gamma\sigma\gamma^{-1}\sigma^{-1}$ soit un 3-cycle.
3. En s'inspirant de la question précédente, montrer que H contient toujours un 3-cycle.
4. Montrer que A_5 est un groupe simple.
5. Que peut-on dire de A_n pour $n \geq 5$.

Exercice 4.7

1. Donner un exemple de groupe contenant au moins deux sous-groupes d'indice 2.
2. Soit H un sous-groupe d'indice 2 de S_n. Montrer que pour tout $\sigma \in S_n$, $\sigma^2 \in H$. En déduire que H contient l'ensemble des 3-cycles et donc que $H = A_n$.
3. Pour un groupe G, on pose $D(G)$ le sous groupe de G engendré par les commutateurs
$$\{\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}, \forall \sigma, \tau \in G\}.$$
Montrer que $D(G)$ est normal dans G.
4. En déduire que pour tout $n \geq 5$, $D(A_n) = D(S_n) = A_n$.
5. Déterminer tous les sous-groupes propres distingués de S_3, S_4, A_3 et A_4.