2. Groupe Symétrique

1. Groupe symétrique d'un ensemble.

Définition. Soit E un ensemble. Une *permutation* de E est une bijection de E dans E. On note S_E l'ensemble des permutations de E. Si $E = \{1, \ldots, n\}$ on le note simplement S_n. L'ensemble S_E muni de la loi de composition des applications est un groupe de neutre $e = \mathrm{id}$ appelé *groupe symétrique sur l'ensemble E.*

Exemple. Supposons $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ on notera une permutation $\sigma \in S_E$ de la manière suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

qui se traduit par $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 5$ et ainsi de suite. Si on pose $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, on peut par exemple calculer

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1 1. Donner les six éléments de S_3. Faire une table pour la loi de groupe de S_3.

2. Quel est l'inverse de $\mu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$?
3. Déterminer le sous-groupe engendré par $\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Déterminer tous les sous-groupes de S_3.
5. On notera 1, 2 et 3 les sommets d'un triangle équilatéral. Comment les éléments de S_3 transforment ce triangle ?

Exercice 2 Montrer que le cardinal de S_n est $n!$.

Exercice 3 Montrer que le groupe S_n n'est pas abélien dès que $n \geq 3$.

2. Cycles.

Définition. Soit $\sigma \in S_n$. L'ensemble

$$\mathrm{supp}(\sigma) = \{i,\ \sigma(i) \neq i\}$$

est appelé le *support* de σ.

Exercice 4 1. Que vaut $\mathrm{supp}(\sigma)$ pour $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Soit $\sigma \in S_n$. Montrer que si $i \in \mathrm{supp}(\sigma)$ alors $\sigma(i) \in \mathrm{supp}(\sigma)$.

3. Montrer que deux permutations σ et τ à supports disjoints commutent. (Indication : étudier les images de $\sigma \circ \tau(i)$ et $\tau \circ \sigma(i)$ dans les 3 cas suivants : $i \in \operatorname{supp}(\sigma)$, $i \in \operatorname{supp}(\tau)$ et $i \notin supp(\sigma) \cup \operatorname{supp}(\tau)$.)

Définition. Une permutation σ de S_A est un cycle de longueur $l \geq 2$ s'il existe l éléments distincts $a_1, a_2, \ldots, a_l$ de A tel que $\sigma(a_1) = a_2$, $\sigma(a_2) = a_3$, ..., $\sigma(a_{l-1}) = a_l$, $\sigma(a_l) = a_1$ et $\sigma(x) = x$ pour tout $x \in A \setminus \{a_1, \ldots, a_l\}$.
On utilise alors la notation cyclique $\sigma = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_l)$.
Un cycle de longueur 2 est appelé une *transposition.*

Exemple. Si $A = \{1,2,3,4,5\}$, $(1\ 3\ 5\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
On remarque que $(1\ 3\ 5\ 4) = (3\ 5\ 4\ 1) = (5\ 4\ 1\ 3) = (4\ 1\ 3\ 5)$.

Exercice 5 1. On se place dans S_4. Vérifier que $(1\ 4)(4\ 3)$ est un 3-cycle.

2. Montrer que tout k-cycle s'écrit comme produit de $k-1$ transpositions.
3. Quel est l'inverse du cycle $(1\ 3\ 5\ 4) \in S_5$?
4. Quel est l'inverse d'une transposition ?

Théorème. Soit $\sigma \in S_n$ tel que $\sigma \neq \mathrm{id}$. Il existe $k \geq 1$ et c_1, ..., c_k des cycles à supports deux à deux disjoints, tels que
$$\sigma = c_1 \cdots c_k.$$
Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs et est appelée *décomposition canonique* de σ.

Exercice 6 1. Soit $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $\tau(1)$, $\tau^2(1)$, $\tau^3(1)$ et $\tau^4(1)$.

2. Vérifier que $\tau = (1\ 5\ 6\ 2)(3\ 4)$.
3. Soit $\sigma \in S_n$ tel que $1 \in \operatorname{supp}(\sigma)$. Soit l le plus petit entier strictement positif tel que $\sigma^l(1) = 1$. Montrer qu'il existe une permutation $\sigma' \in S_n$ telle que
   - $\sigma = (1\ \sigma(1)\ \ldots\ \sigma^{l-1}(1)) \circ \sigma'$.
   - $\operatorname{supp}(\sigma) = \{1,\ \sigma(1)\ \ldots\ \sigma^{l-1}(1)\} \cup \operatorname{supp}(\sigma')$.
   - $\{1,\ \sigma(1)\ \ldots\ \sigma^{l-1}(1)\} \cap \operatorname{supp}(\sigma') = \emptyset$
4. Déduire de la question précédente une preuve de l'existence de la décomposition en produit de cycles à supports disjoints.
5. Expliciter une telle décomposition pour la permutation $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 8 & 6 & 7 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.
6. Soit $\sigma \in S_n$ tel que
$$\sigma = c_1 \cdots c_k = c'_1 \cdots c'_l$$
où c_1, ..., c_k sont des cycles à supports deux à deux disjoints et c'_1, ..., c'_l sont également des cycles à supports deux à deux disjoints. Soit $i \in \operatorname{supp}(c_1)$. Montrer qu'il existe t tel que $i \in \operatorname{supp}(c'_t)$ et qu'alors $c_1 = c'_t$. En déduire l'unicité de la décomposition en cycles à supports deux à deux disjoints.

Exercice 7 1. Montrer que toute permutation $\sigma \in S_n \setminus \{\mathrm{id}\}$ s'écrit comme produit d'au plus $n-1$ transpositions.

2. Soient i et j deux entiers distincts dans $\{2, \ldots, n\}$. Calculer $(1\ i)(1\ j)(1\ i)$.
3. Montrer que toute permutation $\sigma \in S_n \setminus \{\mathrm{id}\}$ s'écrit comme produit de transpositions de la forme $(1\ i)$ pour i parcourant $\{2, \ldots, n\}$.
4. Montrer que toute permutation $\sigma \in S_n \setminus \{\mathrm{id}\}$ s'écrit comme produit de transpositions de la forme $(i \quad i+1)$ pour i parcourant $\{1, \ldots, n-1\}$.

3. Ordres.

Définition. Soit G un groupe noté multiplicativement d'élément neutre e. Un élément a de G est dit d'*ordre fini* s'il existe un entier $k > 0$ tel que $a^k = e$ et dans ce cas on appelle *ordre* de a le plus petit entier $m > 0$ tel que $a^m = e$.

Exemple. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
Alors $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ et $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Donc σ est d'ordre 3.

Exercice 8 1. Quel est l'ordre d'un cycle de longueur l ?

2. Soient $\sigma, \tau \in S_n$ de supports disjoints. Montrer que l'ordre de $\sigma \circ \tau$ est le PPCM des ordres de σ et de τ.
3. En déduire une preuve de la proposition suivante.

Théorème. Soit $\sigma \in S_n \setminus \{\mathrm{id}\}$ de décomposition canonique $c_1 \cdots c_k$. L'ordre de σ est alors le PPCM des longueurs des cycles c_i.

Exercice 9 Soient $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ deux permutations de S_5.

1. Décomposer sous forme canonique σ et τ.
2. Calculer sous forme canonique $\sigma \circ \tau$, $\sigma^2 \circ \tau$, $\sigma \circ \tau^{-1}$.
3. Quels sont les ordres de τ, σ, $\sigma \circ \tau$, $\sigma^2 \circ \tau$, $\sigma \circ \tau^{-1}$?
4. Exprimer τ comme un produit de transpositions de la forme $(i, i+1)$.

4. Conjuguaisons.

Définition. Soient σ et σ' deux permutations de S_n. On dit que σ est *conjuguée* à σ' s'il existe une permutation τ de S_n telle que

$$\sigma = \tau \circ \sigma' \circ \tau^{-1}.$$

Exercice 10 1. Montrer que la relation de conjuguaison est une relation d'équivalence.

2. Soit σ une permutation de S_n et m un entier tel que $2 \leq m \leq n$. Montrer que
$$\sigma \circ (1\ 2\ \ldots\ m) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(1)\ \sigma(2)\ \ldots\ \sigma(m)).$$
3. En déduire que que deux cycles sont conjugués si et seulement s'ils ont le même ordre.
4. Montrer que deux permutations sont conjugués si et seulement les ordres des cycles dans leurs décompositions canoniques coïncident.
5. Trouver une permutation $\sigma \in S_8$ tel que
$$\sigma(1\ 7\ 2)(3\ 5)(4\ 8)\sigma^{-1} = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6\ 7).$$

Exercice 11 1. Montrer que tout élément $\sigma \in S_n$ est conjugué à son symétrique σ^{-1}.
2. Soit $\tau = (1\ 2\ 3\ 4)$ dans S_4, expliciter la conjugaison entre τ et τ^{-1}.

Exercice 12 On note :
$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$s' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 7 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
1. Ces deux permutations sont-elles conjuguées dans S_7 ?
2. Posons $s_1 = (3\ 5)s'$, $s_2 = (5\ 7)s'$. Ces deux permutations sont-elles conjuguées à s ?

Exercice 13 1. Combien y a-t-il de classes de conjugaison dans S_5 ?
2. Quels sont les ordres possibles pour un élément de S_5 ?
3. Pour chacun des éléments suivants de S_8, quel est le cardinal de sa classe de conjugaison
$$(1\ 2),\ (1\ 2\ 3),\ (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 2)(3\ 4\ 5),\ (1\ 2)(3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8)?$$

5. Signature.

Définition. Soit $\sigma \in S_n$. On appelle σ-orbite de $i \in \{1, \ldots, n\}$ l'ensemble $\{\sigma^k(i)\ :\ k \in \mathbb{N}\}$, que l'on notera $\Omega_\sigma(i)$. On pose $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-r}$ où r est le nombre de σ-orbites distinctes.

Exercice 14 Déterminer les orbites de la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 7 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Quelle est la signature de σ ?

Exercice 15 1. Montrer que si c est un cycle d'ordre m de S_n alors $\varepsilon(c) = (-1)^{m-1}$.
2. Soit σ une permuation et τ une transposition de S_n. Montrer que $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = -\varepsilon(\sigma)$. Indication : si $\tau = (i\ j)$, on vérifie que
   - si $\Omega_\sigma(i) \neq \Omega_\sigma(j)$ alors $\Omega_{\sigma\circ\tau}(i) = \Omega_\sigma(i) \cup \Omega_\sigma(j)$,
   - si $\Omega_\sigma(i) = \Omega_\sigma(j)$ alors $\Omega_{\sigma\circ\tau}(i)$ et $\Omega_{\sigma\circ\tau}(j)$ sont disjoints et $\Omega_\sigma(i) = \Omega_{\sigma\circ\tau}(i) \cup \Omega_{\sigma\circ\tau}(j)$,
   - si $k \notin \Omega_\sigma(i) \cup \Omega_\sigma(j)$ alors $\Omega_{\sigma\circ\tau}(k) = \Omega_\sigma(k)$.
3. En déduire que si σ_1 et σ_2 sont deux permutations de S_n alors
$$\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1) \times \varepsilon(\sigma_2).$$
(Ceci signifie que ε définit un homomorphisme de groupes de S_n vers le groupe $(\{1, -1\}, \times)$.)

4. Montrer que si une permutation s'écrit comme produit de k transpositions et comme produit de k' transpositions alors k et k' ont même parité.

Exercice 16 On considère dans S_7 :

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire π comme produit de cycles disjoints.
2. En déduire la signature et l'ordre de π.
3. Combien y-a-t'il d'éléments dans S_7 conjugués avec π ?

Exercice 17 Soit $n \geq 2$ et A_n l'ensemble des permutations de S_n de signatures positives.

1. Montrer que A_n est un sous-groupe de S_n.
2. Montrer que $S_n = A_n \cup (1\ 2) \cdot A_n$ où $(1\ 2) \cdot A_n = \{(1\ 2)\sigma;\ \sigma \in A_n\}$.
3. En déduire le cardinal de A_n.
4. On suppose que $n \geq 4$. Montrer que $(1\ 2)(3\ 4)$ est le produit de deux 3-cycles.
5. Montrer que pour tout $n \geq 3$, le sous-groupe A_n est le sous-groupe engendré par l'ensemble des 3-cycles de S_n.

Rappel. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $M_n(K)$ où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

Exercice 18 En utilisant la formule ci-dessus montrer que si A et B sont deux matrices de $M_n(K)$ alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.