PROGRAMME TRAITE EN COURS DE TOPOLOGIE
Automne 2010

Jeudi 16 septembre 2010

1. NOTION D'ESPACE MÉTRIQUE : Définition d'une distance, d'un espace métrique. Exemple de la droite numérique, exemple de $\mathbb{R}^n$ avec la distance euclidienne.

2. ESPACES NORMÉS : Définition d'un espace normé. Distance associée à une norme. Structure d'espace métrique sur toute partie d'un espace normé. Exemple de $C([a,b],\mathbb{R})$ avec la norme uniforme, avec la norme L^1.

3. ESPACES PRÉHILBERTIENS : Définition d'un produit scalaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Application à des inégalités sur les séries et sur les fonctions. Norme associée à un produit scalaire. Exemple de $l^2(\mathbb{N})$. Exemple de $C([0,2\pi],\mathbb{R})$ avec la norme L^2.

Jeudi 23 septembre 2010

1. ESPACES TOPOLOGIQUES : Définition d'un espace topologique. Ouverts. Voisinages d'un point. Base de voisinage d'un point. Un ensemble est ouvert si et seulement si c'est un voisinage de chacun de ses points. Espaces séparés.

2. TOPOLOGIE DES ESPACES MÉTRIQUES : Définition des ouverts. Topologie associée à une métrique. Description des ouverts de $\mathbb{R}$ muni de la distance canonique. Description des voisinages d'un point dans un espace métrique. Tout point possède un système fondamental dénombrable de voisinages.

3. FERMÉS : Fermés dans un espace topologique. Dans un espace métrique, les points sont des fermés. Les boules « fermées » sont fermées au sens de la topologie de la métrique. Exemples de parties fermées, non ouvertes, non fermées. Ensemble triadique de Cantor : c'est un fermé de $\mathbb{R}$ d'intérieur vide ; il est de mesure de Lebesgue nulle et non dénombrable.

Jeudi 30 septembre 2010

1. ADHÉRENCE, INTÉRIEUR, FRONTIÈRE D'UN ENSEMBLE : Définition de l'intérieur, de l'adhérence et de la frontière. Caractérisation, par les voisinages, des points intérieurs à une partie. Le complémentaire de l'adhérence est égal à l'intérieur du complémentaire. Caractérisation, par les voisinages, des points adhérents à une partie. Exemple : calcul de l'intérieur, de l'adhérence et de la frontière d'un segment semi-ouvert de la droite réelle. Partie partout dense. Espaces séparables. Muni de sa distance usuelle, $\mathbb{R}$ est séparable

2. DISTANCES ÉQUIVALENTES : Définition de l'équivalence de deux distances. Caractérisation de deux distances équivalentes au moyen de boules centrées en un même point. Deux distances quasi-isométriques sont équivalentes. Exemple de normes équivalentes sur $\mathbb{R}^p$. Exemples de distances non équivalentes. La distance $\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ est toujours équivalente à la distance d. La notion de partie bornée n'est pas une notion topologique. Définition d'un espace topologique métrisable. Un exemple d'espace topologique non métrisable.

3. TOPOLOGIE PRODUIT : Ouverts élémentaires (cas fini et infini). Définition des ouverts pour la topologie produit. Ces ouverts constituent une topologie, qui est séparée si tous les espaces facteurs sont séparés (démonstration à terminer).

Jeudi 7 octobre 2010

1. FIN DE LA TOPOLOGIE PRODUIT : un produit infini non dénombrable d'espaces topologiques séparés non réduits à un point n'est pas métrisable.

2. CONVERGENCE DES SUITES : Définition de la limite d'une suite. Unicité de la limite dans le cas d'un espace séparé. Limite d'une suite dans un espace métrique, dans un espace normé. Exemples de suites convergentes et non convergentes dans l'espace $C([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $[a,b]$, muni de la norme de la convergence uniforme. Utilisation des suites dans les espaces métriques pour caractériser les fermés. Condition d'appartenance à l'adhérence d'un ensemble utilisant les suites. Espaces séparables. Convergence des suites à valeurs dans un espace produit.

Jeudi 14 octobre 2010

1. LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT : Définition. Définition équivalente avec des bases de voisinages. Cas des fonctions d'un espace métrique dans un autre. Limite d'une fonction à valeurs dans un espace produit (produit fini et infini).

2. FONCTIONS CONTINUES : Définition de la continuité en un point et de la continuité. Continuité d'une fonction d'un espace métrique dans un autre. Utilisation des suites pour caractériser, dans le cas des espaces métriques, la continuité d'une fonction. Une fonction est continue si et seulement si l'image réciproque d'un ouvert (resp. d'un fermé) est ouverte (resp. fermée).

3. THÉORÈMES SUR LES FONCTIONS CONTINUES : Composition des fonctions continues. Fonctions continues à valeurs dans un espace produit (fini ou infini). Rappels sur la topologie induite. Fonctions défini sur un produit : la continuité implique la continuité des fonctions partielles, mais la réciproque est fausse. Dans un espace métrique, l'application distance $(x,y) \to d(x,y)$ est continue.

Jeudi 21 octobre 2010

1. FIN DES FONCTIONS CONTINUES : Homéomorphismes. Une isométrie surjective est un homéomorphisme. Exemple d'application bijective continue et d'inverse non continu. Fonctions uniformément continues : définition, exemples (fonctions k-lipchitziennes), les fonctions uniformément sont continues, mais la réciproque et fausse en général (un contre-exemple a été donné).

2. APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES : Caractérisation de la continuité d'une application linéaire. Exemple d'application. Deux normes $\| \,.\, \|_1$ et $\| \,.\, \|_2$ sur un espace vectoriel sont équivalentes si et seulement s'il existe des constantes C_1 et C_2 positives telles que $\| \,.\, \|_2 \leq C_1 \| \,.\, \|_1$ et $\| \,.\, \|_1 \leq C_2 \| \,.\, \|_2$. La norme uniforme n'est pas équivalente à la norme en moyenne d'ordre 1 sur $E = C([a,b],\mathbb{R})$. Toute application linéaire d'un espace de dimension finie dans un autre est continue. Une forme linéaire sur un espace normé est continue si et seulement si son noyau est fermé. Le noyau d'une forme linéaire non continue est toujours partout dense. Exemples de formes linéaires continues et non continues en dimension infinie.

Jeudi 28 octobre 2010

1. FIN DES APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES : Norme sur l'espace des applications linéaires continues d'un espace normé dans un autre. Dual topologique d'un espace normé. Le dual de $l^1(\mathbb{N})$ est isométriquement isomorphe à $l^\infty(\mathbb{N})$.

2. ESPACES MÉTRIQUES COMPLETS : Suites de Cauchy dans un espace métrique. Une suite convergente est de Cauchy. Toute suite de Cauchy qui possède une sous-suite convergente est convergente. Existence de suites de Cauchy non convergentes. Définition d'un espace complet, d'un espace de Banach. Dans un espace de Banach, toute série absolument convergente est convergente. Démonstration du fait que $\mathbb{R}$ est un espace de Banach : une suite de Cauchy de nombres réels est bornée ; de toute suite bornée de réels on peut extraire une sous-suite convergente ; complétude de $\mathbb{R}$.

Jeudi 4 novembre 2010

1. THÉORÈMES DE STABILITÉ : une partie fermée d'un espace complet est complète. Une partie complète d'un espace métrique est fermée. Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est toujours fermé. Un produit d'espaces métriques complets est complet pour la distance produit. $\mathbb{R}^n$ est complet.

2. EXEMPLES CLASSIQUES D'ESPACES MÉTRIQUES COMPLETS : L'espace $B(X,E)$ des fonctions bornées sur un ensemble X et à valeurs dans un espace de Banach E est complet pour la norme uniforme. $l^\infty(\mathbb{N})$ est un espace de Banach. Une limite uniforme de fonctions continues est continue. L'espace $C_b(X,E)$ des fonctions continues et bornées sur un espace topologique X, à valeurs dans un espace de Banach E, est complet pour la norme uniforme. L'espace $C([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur un segment fermé et borné $[a,b]$ est complet pour la norme uniforme. L'espace $L^1(X,\mu)$ est complet pour la norme $\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu$ (résultat seulement mentionné, car il a été démontré dans le cours de calcul intégral). $l^1(\mathbb{N})$ est un espace de Banach. Notion d'espace de Hilbert. Démonstration du fait que $l^2(\mathbb{N})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire canonique.

3. THÉORÈME DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES : Énoncé et démonstration complète.

Jeudi 18 novembre 2010

1. SUITE DU THÉORÈME DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES : Application à la résolution du problème de Cauchy pour une équation différentielle de la forme $y'(t) = f(t, y(t)),\ y(0) = y_o$, en supposant f continue et Lipchitzienne par rapport à la variable d'espace. Application à la résolution des équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre à coefficients continus.

2. ESPACES COMPACTS : Définition d'un espace compact. Parties compactes d'un espace topologique séparé. Théorème de Borel-Lebesgue : un segment fermé et borné de $\mathbb{R}$ est compact. Non compacité de $\mathbb{R}$. Une partie fermée d'un espace compact est elle-même compacte.

Prévu pour la prochaine fois

FIN DES ESPACES COMPACTS. Propriétés de stabilité des espaces compacts (par produit, par image continue). Espaces métriques compacts.