2 - LIMITES ET CONTINUITÉ

2- LIMITES ET CONTINUITÉ

2.1- LIMITES DE SUITES

2.1.1- Définition. Soient X un espace topologique, $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de points de X et $a\in X$. On dit que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers a quand $n\to+\infty$, ou que a est limite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ si, pour tout voisinage V de a, il existe un entier $N\geq 1$ tel que : $n\geq N \Longrightarrow x_n\in V$.

Si X est séparé, la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$, lorsqu'elle existe, est unique. En effet, si a, b sont deux limites de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ avec $a\neq b$, il existe un voisinage V de a et un voisinage W de b tels que $V\cap W=\phi$. Par définition de la limite, il existe alors des entiers $N\geq 1$ et $M\geq 1$ tels que :

$$n\geq N \Longrightarrow x_n\in V \text{ et } n\geq M \Longrightarrow x_n\in W.$$

Soit alors $n\geq \mathrm{Max}(N,M)$; on a $x_n\in V\cap W$, ce qui contredit le fait que $V\cap W=\phi$. Dans un espace séparé, il y a donc unicité de la limite d'une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ - Si a est la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$, on note $a=\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Dans la définition 2.1.1, on peut sans inconvénient considérer des voisinages V qui appartiennent à une base de voisinages de a, au lieu de considérer tous les voisinages de a. En particulier, si (X,d) est un espace métrique, on a en considérant les boules $B(a,\varepsilon)$:

$$x_n\to a \iff (\forall\varepsilon>0)(\exists N\geq 1) \text{ tel que : } n\geq N \Longrightarrow x_n\in B(a,\varepsilon),$$

d'où :

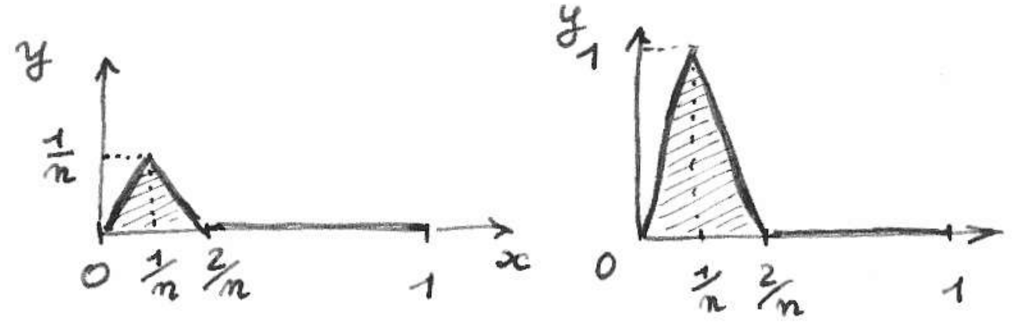
2.1.2 - Proposition. Soient (X,d) un espace métrique, $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de points de X et $a\in X$. Alors,

$$a=\lim_{n\to+\infty} x_n \iff d(x_n,a)\longrightarrow 0 \text{ quand } n\to+\infty.$$

En particulier, si $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite de points d'un espace normé $(E,\|\cdot\|)$ et si $a\in E$, on a :

$$a=\lim_{n\to+\infty} x_n \iff \|x_n-a\|\to 0 \text{ quand } n\to+\infty.$$

2.1.3. Exemple. Munissons $E=C([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\|f\|=\sup_{0\leq x\leq 1}|f(x)|$, et considérons les suite $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(g_n)_{n\geq 1}$ où f_n et g_n sont les fonctions continues dont les graphes sont figurés ci-dessous :



graphe de f_n graphe de g_n

On a $f_n\to 0$ car $\|f_n\|=\frac{1}{n}\to 0$ quand $n\to+\infty$.
La suite $(g_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas. En effet, si $g=\lim_{n\to\infty} g_n$, alors $\sup_{0\leq x\leq 1}|g_n(x)-g(x)|\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, et donc $g(x)=\lim_{n\to\infty} g_n(x)=0$. Mais alors :

$$\|g_n-g\|=\|g_n\|=1 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0,$$

ce qui prouve que la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas.

2.1.4 - Suites et ensembles fermés

2.1.4.1. Soient X un espace topologique, F une partie fermée de X et $(x_1, x_2, \dots)$ une suite de points de F. Si la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge vers $a \in X$, alors $a \in F$. En effet, si $a \notin F$, alors $a \in U = F^c$ qui est un voisinage ouvert de a, et il existe par définition de la limite un entier $N \geq 1$ tel que :

$$n \geq N \implies x_n \in U.$$

Mais alors $x_N \in U = F^c$, ce qui est absurde puisque $x_N \in F$. On a donc $a \in F$. Un fermé dans un espace topologique a donc la propriété de contenir les limites de suites de points de ce fermé. Dans le cas des espaces métriques, on a :

¶ 2.1.4.2 - Proposition - Soient (X, d) un espace métrique et F une partie de X. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) F est fermé dans X ;

(ii) Pour toute suite $(x_n)_{n \geq 1}$ de points de F, on a :

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n \implies a \in F.$$

Démonstration (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte de 2.1.4.1.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons que (ii) soit vérifiée, et montrons que F est fermé, c'est à dire que $U = F^c$ est ouvert. Soit $x \in U$; il nous faut montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U$. Supposons par l'absurde que, pour tout $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \not\subset U$. Il existe alors $x_\varepsilon \in B(x, \varepsilon)$ tel que $x_\varepsilon \in F$. En prenant $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$, on met ainsi en évidence une suite $(x_1, x_2, \dots)$ d'éléments de F tels que $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$ pour tout $n \geq 1$. Comme $d(x_n, x) < \frac{1}{n} \to 0$, on a $x = \lim_{n \to \infty} x_n$ et l'hypothèse (ii) implique que $x \in F$, ce qui est absurde puisque $x \in U = F^c$. Ceci prouve que U est ouvert, et donc que F est fermé. ■

Dans les espaces métriques, les suites permettent également de caractériser l'adhérence d'une partie. Plus précisément, on a :

2.1.4.3- Proposition- Soient (X,d) un espace métrique et A une partie de X. Pour tout $x \in X$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $x \in \bar{A}$;

(ii) Il existe une suite $(x_1, x_2, \ldots)$ de points de A qui converge vers x.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). Puisque $x \in \bar{A}$, la boule $B(x, \frac{1}{n})$ contient, pour tout entier $n \geq 1$, un point $x_n \in A$. La suite $(x_1, x_2, \ldots)$ est donc une suite de points de A, qui converge vers x puisque

$$d(x, x_n) \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si $(x_1, x_2, \ldots)$ est une suite de points de A qui converge vers x, on a :

$$x_n \in A \subset \bar{A} \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$

et il résulte de 2.1.4.2 que $x \in \bar{A}$, puisque $\bar{A}$ est une partie fermée de X. ■

2.1.5- Suites bornées de nombres réels

2.1.5.1. Une suite $(x_1, x_2, \ldots)$ de réels qui converge vers un réel x est nécessairement bornée. En effet, il existe un entier $N \geq 1$ tel que l'on ait :

$$n \geq N \implies |x_n - x| \leq 1,$$

d'où l'on déduit que :

$$|x_n| \leq 1 + |x| \quad \text{quel que soit } n \geq N.$$

Posons $M = \operatorname{Max}\{1+|x|, |x_1|, \ldots, |x_{N-1}|\}$; on a :

$$|x_n| \leq M \quad \text{quel que soit } n \geq 1,$$

ce qui montre que la suite $(x_1, x_2, \ldots)$ est bornée.

L'étude de la convergence des suites bornées de nombres réels repose en grande partie sur le critère simple suivant :

2.1.5.2- Proposition. Toute suite croissante majorée de nombres réels est convergente. Toute suite décroissante minorée de nombres réels est convergente.

Démonstration. Soit $(x_1, x_2, \dots)$ une suite croissante majorée de nombres réels. Il existe donc un réel M tel que l'on ait :

$$x_1 \leqq x_2 \leqq \dots \leqq x_n \leqq x_{n+1} \leqq \dots \leqq M.$$

L'ensemble A des x_n est non vide et majoré par M; il admet donc une borne supérieure

$$a = \sup A.$$

Montrons que $x_n \to a$ quand $n \to +\infty$. A cet effet, fixons $\varepsilon > 0$. Puisque a est la borne supérieure de l'ensemble des x_n, il existe un entier $N \geqq 1$ tel que l'on ait :

$$a - \varepsilon < x_N \leqq a.$$

Pour tout entier $n \geqq N$, on a donc :

$$a - \varepsilon < x_N \leqq x_n \leqq a < a + \varepsilon,$$

soit :
$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Ceci prouve que $a = \lim_{n \to \infty} x_n$. Si $(x_1, x_2, \dots)$ est une suite décroissante minorée de nombres réels, la suite $(-x_1, -x_2, \dots)$ est une suite croissante majorée; elle converge donc d'après ce qui précède, et la suite $(x_n)_{n \geqq 1}$ converge aussi. ■

2.1.5.3. Soient X un ensemble et $(x_1, x_2, \dots)$ une suite de points de X. On appelle suite extraite (ou sous-suite) de la suite $(x_n)_{n \geqq 1}$ une suite de la forme

$$(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$$

où $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ est une suite d'entiers strictement croissante.

2.1.5.4- Théorème (Bolzano-Weierstraß)- De toute suite bornée de nombres réels on peut extraire une sous-suite convergente.

Démonstration. Soit $(x_1, x_2, \ldots)$ une suite bornée de nombres réels. Alors, la suite $(y_1, y_2, \ldots)$ définie par:

$$y_n = \mathrm{Sup}(x_n, x_{n+1}, \ldots)$$

est décroissante et minorée; elle converge donc vers un réel x en vertu de la proposition 2.1.5.2. Montrons que l'on peut extraire de la suite $(x_1, x_2, \ldots)$ une sous-suite qui converge vers x. Puisque $x = \lim_{n\to\infty} y_n$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier $N(\varepsilon)$ donné, un entier $N \geqq N(\varepsilon)$ tel que l'on ait:

$$n \geqq N \implies x - \frac{\varepsilon}{2} < y_n < x + \varepsilon.$$

Comme $y_{N+1} = \mathrm{Sup}(x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots)$, il existe un entier $k \geqq 1$ tel que l'on ait:

$$x - \varepsilon < x_{N+k} \leqq y_n < x + \varepsilon.$$

Posons $n(\varepsilon) = N + k$; on a: $n(\varepsilon) > N(\varepsilon)$ et:

$$|x_{n(\varepsilon)} - x| < \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier $N(\varepsilon)$ donné, il existe un entier $n(\varepsilon) > N(\varepsilon)$ tel que l'on ait:

$$|x_{n(\varepsilon)} - x| < \varepsilon.$$

Prenons $\varepsilon = 1$ et $N(\varepsilon) = 1$. Il existe alors un entier $n_1 > 1$ tel que

$$|x_{n_1} - x| < 1.$$

Prenons ensuite $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et $N(\varepsilon) = n_1$. D'après ce qui précède, il existe un entier $n_2 > n_1$ tel que:

$$|x_{n_2} - x| < \frac{1}{2}.$$

En itérant le procédé, on construit une suite d'entiers $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$ telle que l'on ait, pour tout $k \geqq 1$:

$$|x_{n_k} - x| < \frac{1}{k}.$$

Il s'ensuit que la suite $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots)$ converge vers x, ce qui achève la démonstration du théorème. ∎

Il est souvent difficile de montrer qu'une suite de réels converge, si l'on a aucune idée de sa limite. La notion de suite de Cauchy fournit toutefois un critère efficace de convergence des suites de nombres réels, qui ne suppose pas la connaissance a priori de la limite.

2.1.5.5. Définition. On dit qu'une suite $(x_1, x_2, \dots)$ de nombres réels est de Cauchy si elle possède la propriété suivante :

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \geqq 1) \text{ tel que : } n, p \geqq N \Longrightarrow |x_n - x_p| \leqq \varepsilon .$$

Par exemple, toute suite convergente de nombres réels est une suite de Cauchy. En effet, si $(x_1, x_2, \dots)$ est une suite qui converge vers x, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un entier $N \geqq 1$ tel que :

$$n \geqq N \Longrightarrow |x_n - x| \leq \frac{\varepsilon}{2} .$$

Mais alors, on a pour $n, p \geqq N$:

$$|x_n - x_p| \leq |x_n - x| + |x - x_p| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

ce qui prouve que $(x_1, x_2, \dots)$ est une suite de Cauchy. En fait, on a :

2.1.5.6. Théorème (Critère de Cauchy). Soit $(x_1, x_2, \dots)$ une suite de nombres réels. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) La suite $(x_1, x_2, \dots)$ est de Cauchy ;

(ii) La suite $(x_1, x_2, \dots)$ est convergente.

Démonstration. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $(x_1, x_2, \dots)$ une suite de Cauchy de nombres réels et montrons qu'elle converge. A cet effet, montrons tout d'abord qu'elle est bornée. Comme $(x_n)_{n \geqq 1}$ est une suite de Cauchy, il existe un entier $N \geqq 1$ tel que :

$$n, p \geq N \implies |x_n - x_p| \leq 1.$$

En particulier, on a pour tout $n \geq N$:

$$|x_n| \leq |x_n - x_N| + |x_N| \leq 1 + |x_N|.$$

Posons $M = \mathrm{Max}(|x_1|, \dots, |x_{N-1}|, 1+|x_N|)$; on a alors :

$$|x_n| \leq M \quad \text{quel que soit } n \geq M,$$

et la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, il existe une suite extraite $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots)$ qui converge vers un réel x. Montrons que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. A cet effet, fixons $\varepsilon > 0$. Comme $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$, il existe un entier $K \geq 1$ tel que :

$$k \geq K \implies |x_{n_k} - x| \leq \varepsilon/2.$$

Comme $(x_1, x_2, \dots)$ est une suite de Cauchy, il existe un entier $N \geq 1$ tel que :

$$n, p \geq N \implies |x_n - x_p| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fixons $k \geq K$ tel que $n_k \geq N$. Pour tout entier $n \geq N$, on a :

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ce qui prouve que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Résulte immédiatement de 2.1.5.5. ■

<u>2.1.6- Séries dans les espaces normés.</u> Soit E un espace normé et considérons une suite $(U_0, U_1, \dots)$ d'éléments de E. Formons les sommes

$$S_1 = U_1,$$
$$S_2 = U_1 + U_2,$$
$$\dots\dots$$
$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$
$$\dots\dots$$

Si la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ admet une limite S quand $n \to +\infty$, on dit que la série $U_1+U_2+\cdots+U_n+\cdots$ (ou la série de terme général U_n) est convergente, de somme S, et on écrit :

$$S = U_1+U_2+\cdots+U_n+\cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n .$$

Exemple. Soit $E = C([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[-\pi,\pi]$, à valeurs réelles, muni de la norme de la convergence uniforme. Considérons la suite d'éléments de E définie par :

$$U_1(x) = \frac{\cos x}{1}$$
$$U_2(x) = -\frac{\cos(2x)}{2^2}$$
$$U_3(x) = \frac{\cos(3x)}{3^2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$U_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{\cos(nx)}{n^2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Alors, la série $U_1+U_2+\cdots$ est convergente dans E, et a pour somme la fonction S définie par :

$$S(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4} .$$

En effet, le développement en série de Fourier de la fonction périodique de période 2π définie par

$$f(x) = x^2 \quad \text{pour } -\pi \leq x \leq \pi$$

s'écrit :

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right),$$

où l'égalité a lieu partout en vertu du théorème de Dirichlet. On a donc :

$$\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4} = \frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots$$

Il s'ensuit que l'on a, en posant $S(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$:

$$|S(x) - (U_1(x) + U_2(x) + \cdots + U_n(x))| = \left| (-1)^{n+1} \frac{\cos((n+1)x)}{(n+1)^2} + (-1)^{n+2} \frac{\cos((n+2)x)}{(n+2)^2} + \cdots \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots \leqq \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n},$$

et donc

$$\| S - (U_1 + U_2 + \cdots + U_n) \| = \sup_{-\pi \leqq x \leqq \pi} |S(x) - U_1(x) - \cdots - U_n(x)|$$

$$\leqq \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

ce qui montre que $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n \longrightarrow S$ quand $n \to +\infty$.

2.2. LIMITES DE FONCTIONS

2.2.1- Définition. Soient X, Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ une fonction et $x_0 \in X$. On dit que $f(x)$ tend vers une limite $y_0 \in Y$ quand $x \to x_0$ s'il existe, pour tout voisinage V de y_0, un voisinage W de x_0 tel que :

$$x \in W \Longrightarrow f(x) \in V.$$

On écrit alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$.

Si Y est un espace séparé, on montre comme en 2.1.1 que la limite de $f(x)$ quand $x \to x_0$, lorsqu'elle existe, est unique. Dans la définition 2.2.1, on peut remplacer sans inconvénient les locutions « tout voisinage V de y_0 » et « un voisinage W de x_0 » par « tout élément V d'une base de voisinages de y_0 » et « un élément W d'une base de voisinage de x_0 ». En particulier, si X et Y sont des espaces métriques, on obtient en considérant la base de voisinages