en étant contenu dans U, ce qui contredit la maximalité de I_x). Soit $(I_\alpha)_\alpha$ la famille des I_x. Alors on a :

$$U = \bigcup_\alpha I_\alpha ,$$

où les I_α sont des intervalles ouverts deux à deux disjoints. Pour tout α, choisissons un rationnel $r_\alpha \in I_\alpha$. L'application $\alpha \longmapsto r_\alpha$ est injective, car $r_\alpha = r_\beta$ implique $I_\alpha \cap I_\beta \neq \emptyset$ et donc $I_\alpha = I_\beta$, soit $\alpha = \beta$. Comme $r_\alpha \in \mathbb{Q}$ et que $\mathbb{Q}$ est dénombrable, l'ensemble des α est dénombrable. On a ainsi montré que tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est une réunion dénombrable d'intervalle ouverts deux à deux disjoints.

1.3.3 - Parties fermées d'un espace métrique

1.3.3.1 - Définition. Soit X un espace topologique. On dit qu'une partie F de X est fermée si son complémentaire F^c est ouvert.

Par exemple, $\emptyset$ et X sont des fermés de X. Par passage au complémentaire, on obtient immédiatement qu'une intersection de fermés est fermée, et qu'une réunion finie de fermés est un fermé.

1.3.3.2 - Proposition. Soit (X, d) un espace métrique. Alors on a :

(i) Pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{x\}$ est fermé dans X ;

(ii) Pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, la boule $B(x, r]$ est un fermé de X.

Démonstration.

(i) Soit $x \in X$. Pour tout $y \in X$, $y \neq x$, la boule $B(y, \frac{d(x,y)}{2})$ est un ouvert qui contient y et qui est contenu dans $X - \{x\}$. Il s'ensuit que $X - \{x\}$ est ouvert, et donc $\{x\}$ est fermé.

(ii) Soit $y \in X - B(x,r]$ et montrons l'existence d'une boule ouverte $B(y,\varepsilon)$ incluse dans $X - B(x,r]$, i.e. telle que $B(y,\varepsilon) \cap B(x,r] = \phi$. A cet effet, posons

$$\varepsilon = d(x,y) - r > 0.$$

On a $B(y,\varepsilon) \cap B(x,r] = \phi$, car sinon il existerait $z \in X$ tel que $d(x,z) \leqq r$ et $d(z,y) < \varepsilon$, d'où :

$$d(x,y) \leqq d(x,z) + d(z,y) < r + \varepsilon = d(x,y),$$

ce qui est absurde. Nous avons donc prouvé que $X - B(x,r]$ est ouvert, et donc que $B(x,r]$ est fermé. ∎

1.3.4. Intérieur, adhérence, frontière

1.3.4.1. Soient X un espace topologique et $A \subset X$. On pose :

$$\mathring{A} = \bigcup_{U = \text{ouvert},\, U \subset A} U$$

$$\bar{A} = \bigcap_{F = \text{fermé},\, F \supset A} F$$

et on dit que $\mathring{A}$ est l'intérieur de A et que $\bar{A}$ est l'adhérence (ou la fermeture) de A. On vérifie immédiatement que $\mathring{A}$ est un ouvert inclus dans A, et que c'est le plus grand ouvert de X inclus dans A. De même, $\bar{A}$ est un fermé contenant A, et c'est le plus petit fermé contenant A. On a :

$$\mathring{A} \subset A \subset \bar{A},$$

et on note :

$$\partial A = \bar{A} - \mathring{A}.$$

On dit que ∂A est la frontière de A.

1.3.4.2 - Exemple. Soit $A = [0,1[\subset \mathbb{R}$, où $\mathbb{R}$ est muni de sa distance canonique. La partie A n'est ni ouverte, ni fermée. On a ici :

$\mathring{A} =]0,1[$, $\overline{A} = [0,1]$ et $\partial A = \{0,1\}$.

<u>1.3.4.3</u>. Reprenons les notations de 1.3.4.1. Un point $x \in X$ appartient à $\mathring{A}$ si et seulement si il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subset A$. Si X est un espace métrique (de distance d), on a donc :

$$x \in \mathring{A} \iff \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } B(x,\varepsilon) \subset A.$$
$$\iff \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que: } d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow y \in A.$$

<u>1.3.4.4</u>. Comme le complémentaire d'un ouvert est un fermé, on a pour toute partie A d'un espace topologique X :

$$(\mathring{A})^c = \overline{(A^c)}$$

En effet :

$$(\mathring{A})^c = \Big(\bigcup_{\substack{U \text{ ouvert} \\ U \subset A}} U\Big)^c = \Big(\bigcap_{\substack{U^c \text{ fermé} \\ U^c \supset A^c}} U^c\Big) = \overline{(A^c)}.$$

Cette dualité entre intérieur et adhérence permet d'utiliser 1.3.4.3 pour caractériser l'adhérence d'une partie A :

<u>1.3.4.5- Proposition</u>. <u>Soient X un espace topologique et $A \subset X$. Pour tout $x \in X$, les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) <u>$x \in \overline{A}$</u> ;

(ii) <u>Pour tout voisinage V de x</u>, <u>on a</u> :

$$\underline{V \cap A \neq \emptyset}.$$

<u>Démonstration</u> : Pour tout $x \in X$, on a :

$$x \notin \overline{A} \iff x \in (\overline{A})^c = \mathring{\widehat{A^c}} \iff \exists\, U \text{ ouvert}, x \in U, \text{ tel que } U \subset A^c$$
$$\iff \exists\, U \text{ ouvert}, x \in U, \text{ tel que } U \cap A = \emptyset.$$

Il s'ensuit que :

$$x\in\overline{A} \iff \forall U \text{ ouvert},\ x\in U,\ \text{on a } U\cap A\neq\emptyset$$
$$\iff \forall V \text{ voisinage de } x,\ \text{on a } V\cap A\neq\emptyset.$$

■

Lorsque X est un espace métrique, la proposition 1.3.4.5 se traduit encore par l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) $x\in\overline{A}$

(ii') $\forall r>0,\quad B(x,r)\cap A=\emptyset$.

<u>1.3.4.6 - Partie dense</u>. Soient X un espace topologique et A une partie de X. On dit que A est <u>dense</u> dans X si $\overline{A}=X$. On dit parfois que A est <u>partout dense</u>. Un espace topologique X qui possède un sous-ensemble dénombrable partout dense est dit <u>séparable</u>.

Par exemple, si $\mathbb{R}$ est muni de sa distance canonique, on vérifie immédiatement que $\mathbb{Q}$ est partout dense. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, l'espace topologique $\mathbb{R}$ est séparable.

<u>1.3.5 - Distances équivalentes</u>

<u>1.3.5.1</u>. On dit que deux distances d_1 et d_2 sur un même ensemble X sont <u>équivalentes</u> si elles définissent la même topologie sur X.

Comme la connaissance des ouverts détermine les voisinages d'un point et vice-versa, les distances d_1 et d_2 sont équivalentes si et seulement si elles définissent les mêmes voisinages de tout point. On en déduit immédiatement que :

<u>1.3.5.2 - Proposition</u>. <u>Soient d_1 et d_2 deux distances sur un ensemble X. Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) <u>d_1 et d_2 sont équivalentes</u> ;