Thierry Fack

1- ESPACES MÉTRIQUES

1. ESPACES MÉTRIQUES

Thierry Fack.

1.1- NOTION D'ESPACE MÉTRIQUE

1.1.1- Définition. On appelle distance sur un ensemble X une application $d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty[$ qui vérifie les axiomes suivants :

(i) $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$;
(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ quels que soient $x, y \in X$;
(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ quels que soient $x, y, z \in X$.

Par exemple, l'application $(x,y) \longmapsto d(x,y) = |x-y|$ est une distance sur $X = \mathbb{R}$. Dans la définition ci-dessus, la relation (iii) est appelée l'inégalité triangulaire. Elle implique immédiatement la propriété suivante :

1.1.2- Proposition. Soit d une distance sur un ensemble X. Soient x, y, z des points de X. On a :

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y).$$

Démonstration : On a, en vertu de l'inégalité triangulaire :

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \quad \text{d'où}$$

$$d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y).$$

En échangeant les rôles de x et y, on obtient :

$$d(y,z) - d(x,z) \leq d(x,y),$$

d'où finalement :

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y). \quad \blacksquare$$

1.1.3- Définition - On appelle espace métrique la donnée d'un couple (X, d) formé d'un ensemble X et d'une distance d sur X.

Par exemple, $\mathbb{R}$ muni de la distance $(x,y) \mapsto |x-y|$ est un espace métrique.

1.1.4- Boules dans un espace métrique. Soit (X,d) un espace métrique. Soient $x \in X$ et $r > 0$. On appelle boule ouverte de centre x et de rayon r l'ensemble

$$B(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}.$$

Ainsi, dans $\mathbb{R}$ muni de la distance $(x,y) \mapsto |x-y|$, la boule ouverte $B(x,r)$ est l'intervalle ouvert

$$]x-r, x+r[.$$

De même, on appelle boule fermée de centre x et de rayon $r > 0$ l'ensemble

$$B(x,r] = \{y \in X \mid d(x,y) \leqq r\}.$$

1.2- EXEMPLES D'ESPACES MÉTRIQUES

1.2.1- Espaces $\mathbb{R}^n$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, posons :

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

On définit ainsi une distance sur $\mathbb{R}^n$, qui est appelée distance euclidienne, et $(\mathbb{R}^n, d)$ est un espace métrique. Pour vérifier que d est une distance, il suffit de montrer qu'elle vérifie bien l'inégalité triangulaire. On se ramène facilement à prouver que l'on a :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2} \leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}$$

quels que soient les nombres réels positifs x_i et y_i.
En élevant au carré, ceci revient à vérifier que :

$$2\sum_i x_i y_i \leqq 2\sqrt{\sum_i x_i^2}\sqrt{\sum_j y_j^2}.$$

En élevant une nouvelle fois au carré, on est ramené à vérifier que :

$$\Big(\sum_i x_i y_i\Big)^2 \leqq \Big(\sum_i x_i^2\Big)\Big(\sum_j y_j^2\Big).$$

Mais celà résulte immédiatement de la relation :

$$\Big(\sum_i x_i^2\Big)\Big(\sum_j y_j^2\Big)=\Big(\sum_i x_i y_i\Big)^2+\sum_{i<j}(x_i y_j - x_j y_i)^2. \blacksquare$$

<u>1.2.2 - Espace $C([a,b],\mathbb{R})$</u>. Soient $a<b$ deux nombres réels, et notons $C([a,b],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ qui sont continues.
Si $f,g\in C([a,b],\mathbb{R})$, la fonction $f-g$ est continue sur le segment compact $[a,b]$, donc elle est bornée sur $[a,b]$. Posons :

$$d(f,g)=\sup_{a\leqq x\leqq b}|f(x)-g(x)|.$$

On définit ainsi une distance sur $C([a,b],\mathbb{R})$, qui est appelée la <u>distance de la convergence uniforme</u>. Le seul point non évident est que d vérifie l'inégalité triangulaire. Ceci revient à vérifier que :

$$\sup_{a \leqq x \leqq b} |f(x)+g(x)| \leqq \sup_{a \leqq x \leqq b} |f(x)| + \sup_{a \leqq x \leqq b} |g(x)|$$

quelles que soient $f, g \in CC[a,b], \mathbb{R})$. Or, pour $x \in [a,b]$ fixé, on a :

$$|f(x)+g(x)| \leqq |f(x)|+|g(x)|$$
$$\leqq \sup_{a \leqq x \leqq b} |f(x)| + \sup_{a \leqq x \leqq b} |g(x)|.$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout $x \in [a,b]$ (noter que le second membre est une constante), on en déduit que :

$$\sup_{a \leqq x \leqq b} |f(x)+g(x)| \leqq \sup_{a \leqq x \leqq b} |f(x)| + \sup_{a \leqq x \leqq b} |g(x)|.$$

<u>1.2.3- La droite numérique achevée</u>. On appelle droite numérique achevée l'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ obtenu en rajoutant les points $-\infty$ et $+\infty$ à la droite numérique $\mathbb{R}$. On munit $\overline{\mathbb{R}}$ d'une distance d, et donc d'une structure d'espace métrique, en identifiant $\overline{\mathbb{R}}$ à $[-\pi, \pi]$ au moyen de la bijection

$f : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow [-\pi, \pi]$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & \text{si } x = -\infty \\ \operatorname{Arctg}(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \\ +\pi & \text{si } x = +\infty. \end{cases}$$

On pose alors :

$$d(x,y) = |f(x) - f(y)|.$$

Comme f est bijective, il est immédiat de vérifier que d est une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$.

<u>1.2.4- Distance induite</u>. Soient (X, d) un espace

métrique et $Y \subset X$ une partie de X. La restriction de d à $Y \times Y$ définit trivialement une distance sur Y, appelée <u>distance induite par d sur Y</u>. Cette distance induite définit alors une structure d'espace métrique sur Y. Ainsi, toute partie d'un espace métrique hérite automatiquement d'une structure d'espace métrique. Par exemple, la restriction de la distance sur $\mathbb{R}^n$ considérée en 1.2.1 à la droite d'équation

$$x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$$

est donnée par :

$$d\big((x,0,\dots,0),(y,0,0\dots,0)\big) = |x-y|.$$

C'est la distance usuelle sur cette droite, identifiée à $\mathbb{R}$ par l'application $(x,0,\dots,0) \longmapsto x$.
Dans l'exemple 1.2.3, la restriction de la distance d sur $\overline{\mathbb{R}}$ à $\mathbb{R}$ ne coïncide pas avec la distance usuelle de $\mathbb{R}$ puisque l'on a :

$$d(x,0) = |\mathrm{Arctg}(x)| \neq |x-0| = |x|$$

si $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

1.3- TOPOLOGIE D'UN ESPACE MÉTRIQUE

<u>1.3.1- Notion d'espace topologique</u>. <u>Un espace topologique est par définition un ensemble X muni d'une famille $\mathcal{O}$ de parties de X (appelées parties ouvertes de X) vérifiant les conditions suivantes</u> :

(i) $\emptyset$ <u>et X appartiennent à $\mathcal{O}$</u> ;
(ii) <u>Toute réunion de parties ouvertes $A_\alpha \in \mathcal{O}$ est encore ouverte</u>, i.e.

$$\bigcup_\alpha A_\alpha \in \mathcal{O};$$

(iii) <u>Toute intersection finie de parties ouvertes $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{O}$ est encore ouverte</u>, i.e. $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{O}$.

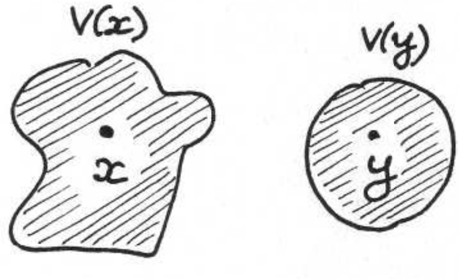
Dans un espace topologique, on dispose de la notion de voisinages d'un point, qui permet d'exprimer qu'un point est « proche » d'un point fixé. Plus précisément, soient X un espace topologique et $x \in X$. On dira qu'une partie V de X est un <u>voisinage de x</u> s'il existe un ouvert $U(x)$ tel que :

$$x \in U(x) \subset V$$

Intuitivement, si « V est très petit », la relation $y \in V$ exprime que y est « très proche » de x.

On dira qu'un espace topologique X est <u>séparé</u> s'il possède la propriété suivante : quels que soient x et y dans X avec $x \neq y$, il existe un voisinage $V(x)$ de x et un voisinage $V(y)$ de y tels que

$$V(x) \cap V(y) = \emptyset$$



Le lecteur vérifiera aisément qu'un sous-ensemble U de X est ouvert si et seulement si U est un voisinage de chacun de ses points.

<u>1.3.2 - Ouverts d'un espace métrique</u>. Soit (X,d) un espace métrique. Si $x \in X$ est fixé, la proximité

d'un point $y \in X$ de x peut être mesurée par la distance $d(x,y)$. Si $d(x,y) < \varepsilon$ avec ε petit, on dira que y est « très voisin » de x. Autrement dit, les boules $B(x,\varepsilon)$ constituent des voisinages de x qui permettent de quantifier la proximité de y à x par la condition :

$$y \in B(x,\varepsilon).$$

Ceci conduit à poser :

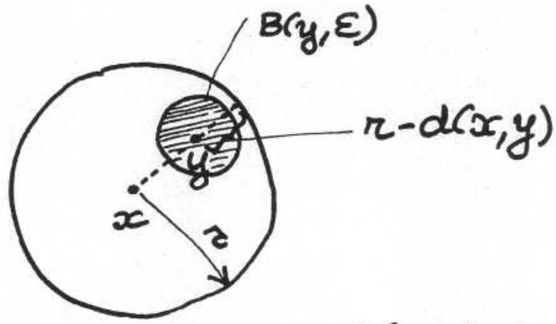
1.3.2.1 – Définition. Soit (X,d) un espace métrique. On dit qu'un sous-ensemble $U \subset X$ de X est ouvert s'il vérifie la condition suivante :

$(\forall x \in U)\ (\exists \varepsilon > 0)$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset U$.

Avec cette définition, on vérifie facilement que les boules ouvertes sont bien des ouverts :

1.3.2.2 – Proposition. Soit (X,d) un espace métrique. Alors, pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, la boule ouverte $B(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$ est un ensemble ouvert.

Démonstration. Soit $y \in B(x,r)$ et montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(y,\varepsilon) \subset B(x,r)$.



Comme $y \in B(x,r)$, on a : $d(x,y) < r$, et donc $r - d(x,y) > 0$. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varepsilon < r - d(x,y),$$

et montrons que $B(y,\varepsilon) \subset B(x,r)$. Soit $z \in B(y,\varepsilon)$.

On a $d(z,y)<\varepsilon$, d'où :

$$d(x,z) \leqq d(x,y)+d(y,z) < d(x,y)+\varepsilon < r,$$

et donc $z \in B(x,r)$. Ainsi, $B(y,\varepsilon) \subset B(x,r)$, et la proposition est démontrée. ■

De la proposition 1.3.2.2, on déduit immédiatement qu'une réunion de boules $B(x,r)$ est un ouvert au sens de la définition 1.3.2.1. Montrons que tout ouvert non vide est une réunion de boules ouvertes. Soit U un ouvert non vide de X. Pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que :

$$x \in B(x,\varepsilon_x) \subset U.$$

On en déduit que $\bigcup_{x\in U} B(x,\varepsilon_x) = U$, et U est bien une réunion de boules ouvertes.

<u>1.3.2.3 - Théorème</u>. <u>Soit (X,d) un espace métrique. Alors, muni de la famille des ouverts au sens de la définition 1.3.2.1, X est un espace topologique séparé. En outre, $V \subset X$ est un voisinage du point $x \in X$ si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset V$.</u>

<u>Démonstration</u>. Notons $\mathcal{O}$ la famille des ouverts au sens de la définition 1.3.2.1. Il est clair que $\emptyset, X \in \mathcal{O}$ et qu'une réunion d'ouverts est encore un ouvert (utiliser la remarque ci-dessus). Pour montrer que $\mathcal{O}$ est stable par intersections finies, il suffit de prouver que, si $U, V \in \mathcal{O}$, alors $U \cap V \in \mathcal{O}$. Soit $x \in U \cap V$. Il existe $\varepsilon, \eta > 0$ tels que :

$$x \in B(x,\varepsilon) \subset U \quad \text{et} \quad x \in B(x,\eta) \subset V.$$

Soit $r = \min(\varepsilon,\eta) > 0$. On a alors :

$$B(x,r) \subset B(x,\varepsilon) \subset U \quad \text{et} \quad B(x,r) \subset B(x,\eta) \subset V,$$

et donc $B(x,r) \subset U \cap V$. Comme ceci est vrai pour tout x, l'ensemble $U \cap V$ est ouvert. On a ainsi montré que X est un espace topologique - Montrons qu'il est séparé. Soient $x, y \in X$ avec $x \neq y$. Comme $x \neq y$, $r = d(x,y)$ est strictement positif. Posons

$$V = B(x, \tfrac{r}{2}) \quad \text{et} \quad W = B(y, \tfrac{r}{2}).$$

On définit ainsi des voisinages de x et de y qui vérifient : $V \cap W = \emptyset$. En effet, si $z \in V \cap W$, on a :

$$r = d(x,y) \leqq d(x,z) + d(z,y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

ce qui est absurde. Ceci prouve que X est séparé. Enfin, si V est un voisinage du point x, V contient un ouvert U avec $x \in U$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset U$, et donc $B(x,\varepsilon) \subset V$. Inversement, si $B(x,\varepsilon) \subset V$, V est un voisinage du point x car il contient l'ouvert $U = B(x,\varepsilon)$ contenant x. ■

<u>1.3.2.4 - Exemple</u>. Considérons l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, muni de la distance canonique $(x,y) \mapsto |x-y|$. D'après 1.1.4, un ouvert de $\mathbb{R}$ est soit vide, soit réunion d'intervalles ouverts. Plus précisément, si U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}$, on pose pour tout $x \in U$:

$$I_x = \bigcup_{\substack{J \text{ intervalle ouvert} \\ x \in J \subset U}} J .$$

On définit ainsi un intervalle ouvert I_x qui est le plus grand intervalle ouvert contenant x et inclus dans U. Si $x, y \in U$, on a soit $I_x \cap I_y = \emptyset$, soit $I_x \cap I_y \neq \emptyset$ et alors $I_x = I_y$ (Car sinon $I_x \cup I_y$ est un intervalle ouvert contenant x et qui contient strictement I_x tout