4- ESPACES COMPACTS

4- ESPACES COMPACTS

4.1- NOTION D'ESPACE COMPACT

4.1.1- DÉFINITION. Un espace topologique X est dit compact s'il est séparé et si de toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de X de réunion X, on peut extraire une sous-famille finie $(U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_n})$ qui recouvre encore X.

Par passage au complémentaire, un espace séparé X est compact si et seulement si de toute famille $(F_i)_{i\in I}$ de fermés de X d'intersection vide, on peut extraire une sous-famille finie $(F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_n})$ telle que $\bigcap_{j=1}^{n} F_{i_j} = \emptyset$.

De manière équivalente, un espace topologique séparé X est compact si et seulement si toute famille $(F_i)_{i\in I}$ de fermés de X qui vérifie $\bigcap_{i\in K} F_i \neq \emptyset$ pour toute partie finie K de I est telle que $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

4.1.2- Parties compactes d'un espace séparé. Soit X un espace topologique séparé. Une partie $A \subset X$ de X est dite compacte si c'est un espace compact pour la topologie induite par X sur A. On a :

Proposition. Soient X un espace topologique séparé et $A \subset X$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) A est une partie compacte de X ;

(ii) De toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts telle que $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ on peut extraire une sous-famille finie $(U_{i_1}, \dots, U_{i_n})$ telle que $A \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$.

Démonstration. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de X telle que $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Posons $\Omega_i = U_i \cap A$. On définit ainsi des ouverts de A qui vérifient :

$$A = \bigcup_{i\in I} \Omega_i$$

Comme A est compact pour la topologie induite, il

existe une sous-famille finie $(\Omega_{i_1},\dots,\Omega_{i_n})$ telle que
$$A=\bigcup_{j=1}^{n}\Omega_{i_j}\subset\bigcup_{j=1}^{n}U_{i_j},$$
d'où (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons que la propriété (ii) soit vérifiée, et soit $A=\bigcup_{i\in I}\Omega_i$ un recouvrement de A par des ouverts Ω_i de A. Pour tout $i\in I$, il existe par définition de la topologie induite par X sur A un ouvert U_i de X tel que $\Omega_i=U_i\cap A$. On a donc: $A\subset\bigcup_{i\in I}U_i$ et il existe, en vertu de (ii), une famille finie $(U_{i_1},\dots,U_{i_n})$ telle que $A\subset\bigcup_{j=1}^{n}U_{i_j}$. Mais alors, $A\subset\bigcup_{j=1}^{n}(U_{i_j}\cap A)\subset A$, d'où
$$A=\bigcup_{j=1}^{n}\Omega_{i_j},$$
ce qui prouve que A est une partie compacte de X. ∎

4.1.3- Théorème (Borel-Lebesgue). Soient $a,b\in\mathbb{R}$ avec $a\leq b$. Alors, l'intervalle $[a,b]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $[a,b]\subset\bigcup_{i\in I}U_i$. Soit A l'ensemble des $x\in[a,b]$ tels que $[a,x]$ soit recouvert par un nombre fini de U_i. L'ensemble A est non vide car $a\in A$ puisqu'il existe un indice i tel que $a\in U_i$. Comme l'ensemble A est majoré par b, il admet une borne supérieure $c=\operatorname{Sup}(A)$ et on a: $a\leq c\leq b$. Montrons que $c\in A$. On peut supposer à cet effet que $a<c$. Puisque $c\in[a,b]$, il existe $i\in I$ tel que $c\in U_i$. Comme U_i est ouvert, il existe $\varepsilon>0$ tel que $]c-\varepsilon,c+\varepsilon[\subset U_i$, et on peut choisir ε suffisamment petit pour que $a<c-\varepsilon<c$. Par définition de la borne supérieure, il existe $x\in A$ tel que l'on ait: $c-\varepsilon<x\leq c$. Comme $x\in A$, l'intervalle $[a,x]$ est recouvert par des ouverts $U_{i_1},\dots,U_{i_n}$ en nombre fini. Par ailleurs, $[x,c]\subset U_i$, et donc $[a,c]$ est recouvert par $U_{i_1},\dots,U_{i_n}$ et U_i, ce qui montre que $c\in A$. Pour terminer, montrons que $c=b$. En effet, si $c<b$, il existe $i\in I$ tel que $c\in U_i$, et donc on peut trouver $\varepsilon>0$ tel

$]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\subset U_i$ et $c+\varepsilon < b$. Mais alors, $[a,c]$ est recouvert par un nombre fini d'ouverts $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ (car $c \in A$), et $[c, c+\frac{\varepsilon}{2}]$ est recouvert par U_i, de sorte que $[a, c+\frac{\varepsilon}{2}]$ est recouvert par $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ et U_i. Il s'ensuit que $c+\frac{\varepsilon}{2} \in A$, ce qui est absurde puisque $c = \sup A$. Donc, $c = b$, et le théorème de Borel-Lebesgue est démontré. ■

4.1.4- Remarque. $\mathbb{R}$ n'est pas compact. En effet, les ouverts $U_n =]-n, n[$ recouvrent $\mathbb{R}$, mais un nombre fini de U_n ne permet pas de recouvrir $\mathbb{R}$.

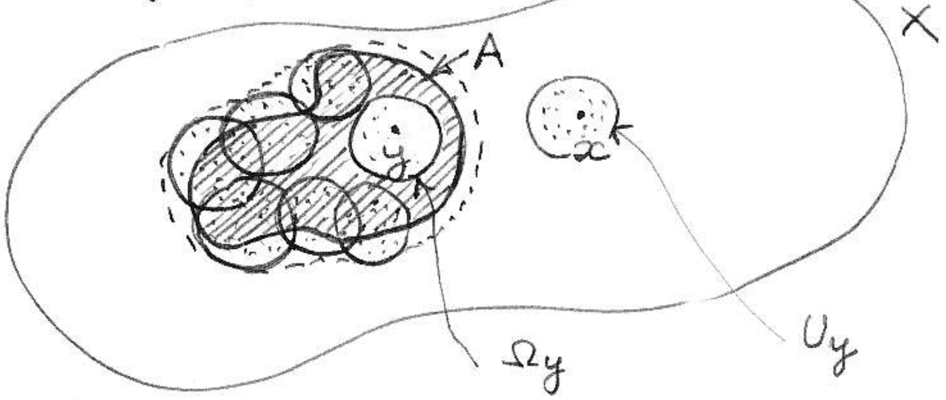
4.2- PROPRIÉTÉS DES ESPACES COMPACTS

4.2.1- Théorème. Soient X un espace topologique séparé et $A \subset X$.

(i) Si A est une partie compacte de X, alors A est fermée dans X;

(ii) Si X est compact et si A est fermé dans X, alors A est une partie compacte de X.

Démonstration. (i) Supposons que A soit une partie compacte de X et montrons que $X-A$ est ouvert. À cet effet, on peut supposer que $X-A \neq \emptyset$. Soit $x \in X-A$. Pour tout $y \in A$, on a $x \neq y$ et, puisque X est séparé, il existe un ouvert Ω_y de X contenant y et un ouvert U_y de X contenant x tels que $\Omega_y \cap U_y = \emptyset$.



les ouverts Ω_y recouvrent A. Par compacité de A, il existe $y_1, \dots, y_n$ dans A tels que $A \subset \Omega_{y_1} \cup \dots \cup \Omega_{y_n}$. Posons

$$U = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}.$$

On définit ainsi un ouvert U qui contient x et qui vérifie

$$U \cap (\Omega_{y_1} \cup \cdots \cup \Omega_{y_n}) = \emptyset,$$

et donc $U \cap A = \emptyset$. Ainsi, U est un ouvert qui contient x et qui est contenu dans $X-A$, et par conséquent $X-A$ est un voisinage de x pour tout $x \in X-A$. Ceci prouve que $X-A$ est ouvert, donc que A est fermé.

(ii) Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de X recouvrant A. Comme A est fermé, $U = X-A$ est ouvert, et la famille constituée des ouverts U_i et de U recouvre X. Puisque X est compact, il existe des ouverts $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$ en nombre fini tels que

$$X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n} \cup U.$$

Il s'ensuit que

$$A \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n},$$

et A est une partie compacte de X. ■

4.2.2 - Corollaire. Les parties compactes de $\mathbb{R}$ sont les parties fermées et bornées de $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit A une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$. Il existe un réel $m \geq 0$ tel que $A \subset [-m, m]$ et, puisque A est fermée dans $\mathbb{R}$, elle est fermée dans $[-m, m]$. Comme $[-m, m]$ est compact en vertu du théorème de Borel-Lebesgue, il résulte de 4.2.1 (ii) que A est compacte.

Inversement, soit A une partie compacte de $\mathbb{R}$. D'après 4.2.1 (i), A est fermée dans $\mathbb{R}$. Comme $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-n, n[$, il existe par compacité de A des entiers $n_1, n_2, \ldots, n_k$ tels que $A \subset \bigcup_{j=1}^{k}]-n_j, n_j[\subset [-n, n]$ où $n = \mathrm{Max}(n_1, \ldots, n_k)$.

Ainsi, A est bornée et fermée, et le corollaire est démontré. ■

4.2.3 - Proposition. Soit X un espace topologique séparé.

(i) Si A et B sont des parties compactes de X, alors $A \cup B$ est compacte ;

(ii) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille non vide de parties compactes de X, alors $\bigcap_{i\in I} A_i$ est compacte.

Démonstration (i) Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de X recouvrant $A \cup B$. Cette famille recouvre A et, par compacité de A, il existe un sous-ensemble fini J de I

tel que $A \subset \bigcup_{i \in J} U_i$. De même, il existe une partie finie K de I telle que $B \subset \bigcup_{i \in K} U_i$. Mais alors, les U_i ($i \in J \cup K$) recouvrent $A \cup B$, ce qui prouve que $A \cup B$ est compacte.

(ii) Comme les A_i sont compactes, elles sont fermées, et $\bigcap_{i \in I} A_i$ est fermé dans X, donc aussi dans A_{i_0} où $i_0 \in I$ est fixé. Comme A_{i_0} est compacte et $\bigcap_{i \in I} A_i$ est fermé dans A_{i_0}, la compacité de $\bigcap_{i \in I} A_i$ résulte de 4.2.1 (ii). ■

4.2.4- Théorème. Soient X un espace compact, Y un espace topologique séparé et $f : X \to Y$ une application continue. Alors, $f(X)$ est une partie compacte de Y.

Démonstration. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de Y telle que $f(X) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Alors $X = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$ et, comme les $f^{-1}(U_i)$ sont ouverts (car f est continue) et X est compact, il existe $i_1, \ldots, i_n \in I$ tels que :

$$X = f^{-1}(U_{i_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_{i_n}).$$

On en déduit que

$$f(X) \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n},$$

et par conséquent $f(X)$ est une partie compacte de Y. ■

4.2.5- Corollaire. Soient X un espace compact, Y un espace topologique séparé et $f : X \to Y$ une bijection continue de X sur Y. Alors, f est un homéomorphisme de X sur Y.

Démonstration. Il suffit de démontrer que $f^{-1} : Y \to X$ est continue. Or, pour tout fermé F de X, on a :

$$(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$$

et, comme F est compact (car fermé dans X qui est compact), $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ est compact donc fermé dans Y. ■

4.2.6- Théorème. Le produit d'un nombre fini d'espaces compacts est compact pour la topologie produit.

Démonstration. Il suffit de montrer que, si X et Y sont compacts, alors $X \times Y$ est compact. Comme X et Y sont séparés, il en va de même du produit $X \times Y$ comme on le vérifie aisément. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $X \times Y$ par des ouverts. Fixons $x \in X$ et considérons les points $m = (x,y) \in \{x\} \times Y$. Pour tout $m \in \{x\} \times Y$, il existe $i(m) \in I$ tel que $m \in U_{i(m)}$. Par définition de la topologie produit, il existe un voisinage ouvert V_m de x dans X et un voisinage ouvert W_m de y dans Y tels que l'on ait :

$$m = (x,y) \in V_m \times W_m \subset U_{i(m)}$$

Lorsque m parcourt $\{x\} \times Y$, les W_m recouvrent Y et il existe, par compacité de Y, des points $m_1, \dots, m_k$ de $\{x\} \times Y$ en nombre fini tels que

$$Y = W_{m_1} \cup \dots \cup W_{m_k}$$

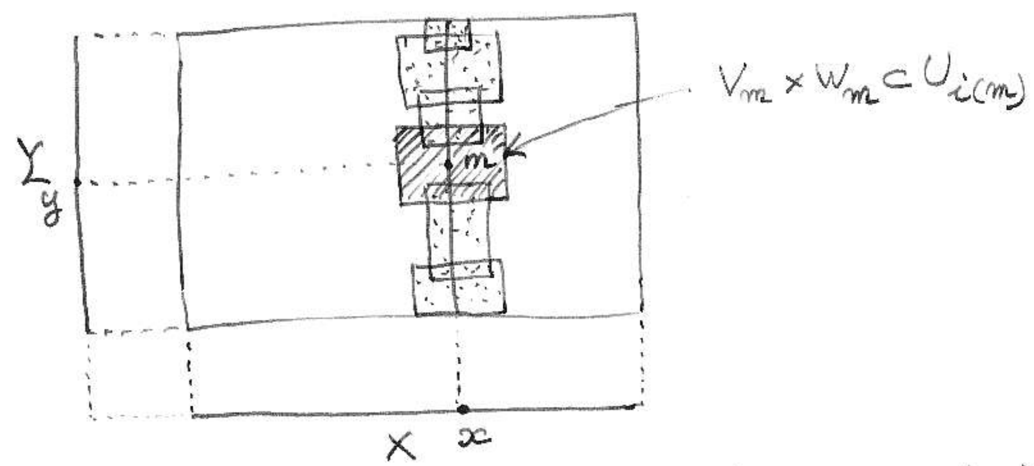
Posons

$$V_x = V_{m_1} \cap \dots \cap V_{m_k} ;$$

on définit ainsi un voisinage ouvert V_x de x tel que :

$$V_x \times Y \subset V_{m_1} \times W_{m_1} \cup \dots \cup V_{m_k} \times W_{m_k} \subset U_{i(m_1)} \cup \dots \cup U_{i(m_k)},$$

de sorte que $V_x \times Y$ est recouvert par un nombre fini de U_i.



Lorsque x parcourt X, les ouverts V_x recouvrent X. Comme X est compact, il existe $x_1, \dots, x_q$ dans X tels que :

$$X = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_q}$$

Mais alors :

$$X \times Y = \bigcup_{j=1}^{q} V_{x_j} \times Y \quad \text{et,}$$

comme chaque $V_{x_j} \times Y$ est recouvert par un nombre fini de U_i, l'espace $X \times Y$ est une réunion finie de U_i. Ceci prouve que $X \times Y$ est compact. ■

4.2.7. Corollaire. Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées et bornées.

Démonstration. Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est bornée si et seulement si elle est contenue dans un pavé de la forme :

$$P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$

Par ailleurs, un tel pavé est compact en vertu de 4.1.3 et de 4.2.6. La démonstration du corollaire 4.2.7 est alors analogue à celle du corollaire 4.2.2, en remplaçant les segments fermés et bornés de $\mathbb{R}$ par les pavés de $\mathbb{R}^n$ de la forme

$$P = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]. \ ■$$

4.3. ESPACES MÉTRIQUES COMPACTS

4.3.1. Théorème. Soit (X, d) un espace métrique. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) X est un espace compact ;

(ii) Toute suite de points de X possède une sous-suite convergente.

Démonstration. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $(x_1, x_2, \ldots)$ une suite de points de X et posons, pour tout entier $n \geq 1$:

$$F_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}.$$

Les F_n forment une suite décroissante de fermés non vides et puisque X est compact par hypothèse, on a :

$$\bigcap_{n \geq 1} F_n \neq \emptyset.$$

Soit $x \in \bigcap_{n \geq 1} F_n$ et montrons qu'il existe une sous-suite de $(x_n)_n$ qui converge vers x. A cet effet, construisons une sous-suite $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ telle que $d(x, x_{n_k}) \leq \frac{1}{k}$. Comme $x \in F_1 = \{x_1, x_2, \ldots\}$, la boule $B(x, 1)$ contient un point de l'ensemble des x_n $(n \geq 1)$. Soit x_{n_1} un tel point ; on a bien $d(x, x_{n_1}) \leq 1$. Supposons $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$

construit, et montrons comment construire $x_{n_{k+1}}$. Comme $x \in F_{n_k+1}$, la boule $B(x, \frac{1}{k+1})$ contient un point de l'ensemble $\{x_{n_k+1}, x_{n_k+2}, \dots\}$. Soit $x_{n_{k+1}}$ un tel point ; on a nécessairement $n_{k+1} \geq n_k + 1 > n_k$ et $d(x, x_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{k+1}$.
Par récurrence, on construit ainsi une suite extraite $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(x_n)_{n\geq 1}$ telle que :

$$d(x, x_{n_k}) \leq \frac{1}{k} \quad \text{pour tout } k \geq 1,$$

et on a : $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ d'où (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X par des ouverts et montrons qu'on peut recouvrir X par un nombre fini des U_i.

a) Montrons tout d'abord l'existence d'un réel $r > 0$ tel que toute boule ouverte $B(x, r)$ soit contenue dans un U_i.

Supposons qu'un tel réel $r > 0$ n'existe pas. Alors, pour tout entier $n \geq 1$, il existe une boule $B(x_n, \frac{1}{n})$ qui ne soit contenue dans aucun des U_i. D'après (ii), il existe une suite $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ extraite de $(x_n)_{n\geq 1}$ qui converge vers un point $x \in X$. Comme les U_i recouvrent X, il existe $i \in I$ tel que $x \in U_i$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U_i$ et fixons $n_k \geq 1$ tel que l'on ait :

$$d(x, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2}$$

(ce qui est possible puisque $d(x, x_{n_k}) \to 0$ et $n_k \to +\infty$ quand $k \to +\infty$).
Alors on a :

$$y \in B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \Longrightarrow d(x,y) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

et donc $y \in B(x, \varepsilon) \subset U_i$. On a donc

$$B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subset U_i,$$

ce qui contredit le fait qu'aucune des boules $B(x_n, \frac{1}{n})$ soit contenue dans un U_i et prouve l'assertion a).

b) Il suffit donc, pour terminer la démonstration, de prouver que X peut être recouvert par un nombre fini de boules $B(x, r)$. Soit $x_1 \in X$. Si $B(x_1, r) = X$,